MECHANIKA BUDOWLI – WZORY

Uwagi:

Wzory ujęte w ramki powinny być opanowane pamięciowo (większość z nich wymaga jedynie zrozumienia aby je „zapamiętać”)!

Pozostałe wzory, jeżeli będą potrzebne w trakcie kolokwium będą podane razem z treścią zadania; jednak należy zwrócić uwagę, że nie będzie podany opis poszczególnych ich składników, ani rysunków interpretujących np. zwroty osi.

Moment statyczny siły względem punktu

$$\boxed{M = P \cdot r \cdot \sin\phi = P \cdot a}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = \vec{k}\left(r_x P_y - r_y P_x\right)$$

Warunki równowagi

Zbieżny układ sił: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0}$

Układ sił dowolnych: $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} P_{yi} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Oi} = 0}$

lub $\boxed{\sum_{i=1}^{n} P_{xi} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0}$

lub $\boxed{\sum_{i=1}^{n} M_{Ai} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} = 0 \;,\quad \sum_{i=1}^{n} M_{Ci} = 0}$

Równania różniczkowe równowagi elementu pręta

$$\boxed{\frac{dN(x)}{dx} = -n(x) \;,\quad \frac{dV(x)}{dx} = -p(x) \;,\quad \frac{dM(x)}{dx} = V(x)}$$

Łuk trójprzegubowy paraboliczny

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x) \;,\quad \mathrm{tg}\phi = y' = \frac{4f}{l^2}(l-2x)$$

$$N = N^0 \cos\phi - V^0 \sin\phi$$

$$V = V^0 \cos\phi + N^0 \sin\phi$$

Stan naprężeń

$$\sigma_\varphi = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\varphi + \tau_{xy}\sin 2\varphi$$

$$\tau_\varphi = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\varphi + \tau_{xy}\cos 2\varphi$$

Naprężenia główne:

$$\boxed{\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2}}$$

$$\mathrm{tg}2\varphi_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi_0 > 0$ maksimum

$\left(\sigma_x - \sigma_y\right)\cos 2\varphi_0 < 0$ minimum

Naprężenia styczne:

$$\tau_3 = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}{}^2} = \pm\frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} \qquad \left(\tau_1 = \pm\frac{\sigma_2}{2},\ \tau_2 = \pm\frac{\sigma_1}{2}\right)$$

$$\overline{\varphi}_0 = \varphi_0 + \frac{\pi}{4}$$

Stan odkształceń

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\varphi + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\varphi$$

$$\varepsilon_{1,2} = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}\gamma_{xy}{}^2}$$

$$\mathrm{tg}2\varphi_0 = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y}$$

$\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\cos 2\varphi_0 > 0$ maksimum

$\left(\varepsilon_x - \varepsilon_y\right)\cos 2\varphi_0 < 0$ minimum

Związki fizyczne – przestrzeń:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \nu\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \nu\left(\sigma_x + \sigma_z\right)\right]$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},\quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G},\quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},\quad G = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}$$

Związki fizyczne – stan osiowy:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x$$

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu\varepsilon_x$$

Związki fizyczne – PSN:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \qquad \sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \qquad \sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}\left(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) \qquad \sigma_z = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Związki fizyczne – PSO:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E}\left[\left(1-\nu\right)\sigma_x - \nu\sigma_y\right] \qquad \sigma_x = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y\right]$$

$$\varepsilon_y = \frac{1+\nu}{E}\left[\left(1-\nu\right)\sigma_y - \nu\sigma_x\right] \qquad \sigma_y = \frac{E}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)}\left[\left(1-\nu\right)\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x\right]$$

$$\varepsilon_z = 0 \qquad \sigma_z = \nu\left(\sigma_x + \sigma_y\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \qquad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}$$

Rozciąganie -ściskanie:

$$\boxed{\begin{aligned} &\sigma_x = \frac{N}{A} \\ &\varepsilon_x = \frac{1}{E}\sigma_x = \frac{N}{EA} \\ &\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}\sigma_x = -\nu\varepsilon_x \end{aligned}}$$

$$\frac{du}{dx} = \varepsilon_x$$

dla $u_{x=0} = 0$ $\qquad u\left(x\right) = \int_0^x \varepsilon\left(x_1\right)dx = \int_0^x \frac{N\left(x_1\right)}{EA\left(x_1\right)}dx_1 \qquad u(l) = \int_0^l \frac{N\left(x\right)}{EA\left(x\right)}dx$

$$\boxed{\text{dla } u_{x=0} = 0 \quad \text{oraz } N,\ A,\ E \quad \text{const} \qquad \Delta l = u\left(l\right) = \frac{Nl}{EA}}$$

Środki ciężkości:

$$S_x = \int_A ydA \qquad S_y = \int_A xdA \qquad \boxed{S_x = \sum y_i A_i\ ,\ \ S_y = \sum x_i A_i}$$

$$\boxed{x_c = \frac{S_y}{A} \qquad y_c = \frac{S_x}{A}}$$

Momenty bezwładności figur płaskich:

$$J_x = \int_A y^2 dA \qquad J_y = \int_A x^2 dA$$

$$J_{xy} = \int_A xydA \qquad J_0 = \int_A r^2 dA = J_x + J_y$$

Promień bezwładności: $i_k = \sqrt{\dfrac{J_k}{A}}$

Wzory Steinera:

$$\boxed{\begin{aligned} J_x &= J_x^c + A{y_c}^2 \\ J_y &= J_y^c + A{x_c}^2 \\ J_{xy} &= J_{xy}^c + Ax_c y_c \end{aligned}}$$

Główne momenty bezwładności:

$$J_{1,2} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + {J_{xy}}^2}$$

$$\mathrm{tg}2\varphi_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y} \qquad (J_x - J_y)\cos 2\varphi_0 > 0 \qquad \text{maksimum}$$

Prostokąt: $\boxed{J_x^c = \dfrac{bh^3}{12}}$

Trójkąt: $J_x^c = \dfrac{bh^3}{36}, \qquad J_{xy}^c = -\dfrac{b^2h^2}{72}$

Koło: $J_x^c = J_y^c = \dfrac{1}{2}J_c = \dfrac{\pi r^4}{4}$

Zginanie proste:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x}y$$

$$|\sigma_g| = \left|\frac{M_x}{W_g}\right|, \qquad |\sigma_d| = \left|\frac{M_x}{W_d}\right| \qquad W_g = \frac{J_x}{e_g}, \qquad W_d = \frac{J_x}{e_d}$$

Zginanie ze ścinaniem

$$\boxed{\tau = \frac{V_y S_x^\gamma}{J_x b}}$$

Zginanie ukośne:

$$\boxed{\sigma = \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x}$$

$$|\sigma_{\max}| = \left|\frac{M_x}{W_x}\right| + \left|\frac{M_y}{W_y}\right| \qquad W_x = \frac{J_x}{y_{\max}}, \qquad W_y = \frac{J_y}{x_{\max}}$$

Mimośrodowe ściskanie/rozciąganie

$$\boxed{\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{J_x}y - \frac{M_y}{J_y}x}$$

$$N = P,\ M_x = Pe_y,\ M_y = -Pe_x \qquad \rightarrow \quad \sigma = \frac{P}{A} + \frac{Pe_y}{J_x}y + \frac{Pe_x}{J_y}x$$

Rdzeń przekroju

oś pozioma (y_o): $e_y = \frac{i_x^2}{y_o} = \frac{J_x}{Ay_o} = -\frac{W_x}{A}$

oś pionowa (x_o): $e_x = \frac{i_y^2}{x_o} = \frac{J_y}{Ax_o} = -\frac{W_y}{A}$

Skręcanie (Pręty okrągłe i rury):

naprężenia: $\tau = \frac{M_s \rho}{J_0}$, $\tau_{\max} = \frac{M_s r}{J_0} = \frac{M_s}{W_0}$, $W_0 = \frac{J_0}{r}$

kąty: $\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_s}{GJ_0}$ $\varphi = \frac{M_s}{GJ_0}\int_0^l dz = \frac{M_s l}{GJ_0}$

Biegunowe momenty bezwładności:

koło: $J_0 = \frac{\pi}{2}R^4$,........pierścień $J_0 = \frac{\pi}{2}(R^4 - r^4)$, rura cienkościenna $J_0 = 2\pi r_0^3 \delta$

Ogólnie: naprężenia: $\tau = \frac{M_s}{W_s}$, kąty: $\varphi = \frac{M_s l}{GJ_s}$

Pręty prostokątne: $W_s = \beta h b^2$, $J_s = \alpha h b^3$

Połączenia technologiczne

Śruby i nity: $\tau = \frac{P}{A} = \frac{P}{mnA_1} \le f_{vd}$, $\sigma = \frac{P}{n_d d t_{\min}} \le f_{cd}$, $\sigma = \frac{P}{(b - n_p d) t_{\min}} \le f_{td}$

Nośność śruby (nitu)

$N_t^I = 2 f_{vd} \frac{\pi d^2}{4}$ - ścięcie (nit dwucięty)

$N_d = f_{cd} \cdot d t_{\min}$ - docisk

Połączenia spawane (pachwinowe)

$\tau = \frac{P}{la} \le f_{vd}$ - pojedyncza spoina o długości l

Linia ugięcia - metoda Eulera

$\boxed{y'' = -\frac{M(x)}{EJ} \quad \text{lub} \quad y^{IV} = p(x)}$

$y' = \int F(x)\, dx + C_1$

$y = \int \left[\int F(x) dx \right] dx + C_1 x + C_2$

$y' \cong \varphi$

Stateczność

$$P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ}{l_w^2} \qquad \text{lub} \qquad P_{kr} = \frac{\pi^2 EJ_{\max}}{l_w^2}$$

wspornik $l_w = 2l$

z obu stron swobodne podparcie $l_w = l$

swobodne podparcie i utwierdzenie $l_w = 0,7l$

belka utwierdzona $l_w = 0,5l$

Sprawdzenie czy wyboczenie jest w zakresie sprężystym

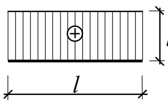
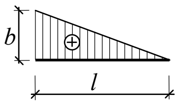
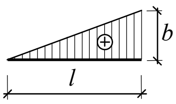
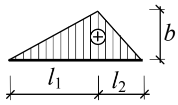
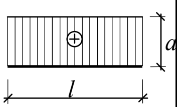
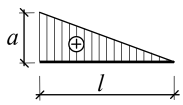
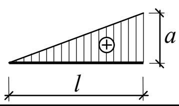
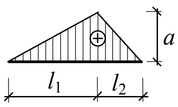
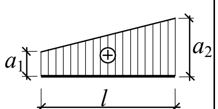
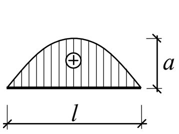
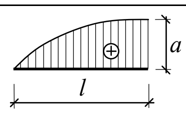
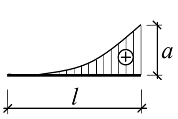
smukłość pręta $\lambda = \frac{l_w}{i}$

$\lambda_p = \pi\sqrt{\frac{E}{\sigma_p}}$ gdy $\lambda > \lambda_p$ możemy stosować wzór $\sigma_{kr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$

Zasada prac wirtualnych

$$\delta_i = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}}{EJ} \mathrm{d}s \ , \quad \delta_i = \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{n} N_k \bar{N}_k l_k \ , \quad \delta_i = \int_s \frac{M \cdot \bar{M}}{EJ}\mathrm{d}s + \frac{1}{EA}\sum_{k=1}^{n} N_k \bar{N}_k l_k$$

Wartości całek z iloczynów dwóch funkcji $K = \int M \cdot \bar{M} \mathrm{d}x$

$\bar{M}$ \ M				
	lab	$\frac{1}{2}lab$	$\frac{1}{2}lab$	$\frac{1}{2}lab$
	$\frac{1}{2}lab$	$\frac{1}{3}lab$	$\frac{1}{6}lab$	$\frac{1}{6}ab(l+l_2)$
	$\frac{1}{2}lab$	$\frac{1}{6}lab$	$\frac{1}{3}lab$	$\frac{1}{6}ab(l+l_1)$
	$\frac{1}{2}lab$	$\frac{1}{6}ab(l+l_2)$	$\frac{1}{6}ab(l+l_1)$	$\frac{1}{3}lab$
	$\frac{1}{2}lb(a_1+a_2)$	$\frac{1}{6}lb(2a_1+a_2)$	$\frac{1}{6}lb(2a_2+a_1)$	$\frac{1}{6}b[a_1(l+l_1)+a_2(l+l_2)]$
	$\frac{2}{3}lab$	$\frac{1}{3}lab$	$\frac{1}{3}lab$	$\frac{1}{3}ba\left(l+\frac{l_1 l_2}{l}\right)$
	$\frac{2}{3}lab$	$\frac{1}{4}lab$	$\frac{5}{12}lab$	$\frac{1}{12}lab\left(3+\frac{3l_1}{l}-\frac{l_1^2}{l^2}\right)$
	$\frac{1}{3}lab$	$\frac{1}{12}lab$	$\frac{1}{4}lab$	$\frac{1}{12}lab\left(1+\frac{l_1}{l}+\frac{l_1^2}{l^2}\right)$

Statyczna wyznaczalność układów prętowych

$$\boxed{s = r + 3z - p_g - 3}$$

r - liczba składowych reakcji podporowych,
z - liczba zamkniętych pierścieni,
p_g - liczba przegubów (nie dotyczy podpór).

Kratownice $$\boxed{s = r + p - 2w}$$

p - liczba prętów,
w - liczba węzłów, w tym podporowych (nie zależy od liczby zbiegających się w nich prętów).

- $s < 0$ – układ jest chwiejny lub geometrycznie zmienny (mechanizm),
- $s = 0$ – układ jest statycznie wyznaczalny,
- $s > 0$ – układ jest statycznie niewyznaczalny.