

MECHANIKA BUDOWLI sem.II

Prof. dr hab. inż. **JAROSŁAW PRZEWŁÓCKI**
pok. 364

Konsultacje: do ustalenia

Literatura:

- Branicki Cz.: Zadania z mechaniki budowli. T.1, str. int. WILIS PG.
- Chudzikiewicz A.: Statyka budowli. Część I i II.
- Kolendowicz T.: Mechanika budowli dla architektów.
- Przewłócki J., Górski J.: Podstawy mechaniki budowli.
- Pyrak S., Szulborski K.: Mechanika konstrukcji.

<http://www.pg.gda.pl/>

Wydział
Architektury

Katedry

Katedra Technicznych Podstaw
Projektowania Architektonicznego

Strona internetowa



Warunki zaliczenia – semestr II (cz. 1)

- W zajęciach mogą uczestniczyć jedynie Osoby znajdujące się na Listach Studenckich.
- Obecność na wszystkich **wykładach i ćwiczeniach** jest obowiązkowa i będzie sprawdzana.
- Zaliczenie ćwiczeń audytoryjnych w II semestrze uzyskuje się na podstawie wyników **dwóch kolokwίων pisemnych**.
- Poszczególne kolokwia oceniane są w skali punktowej 0 – 50 pkt. W sumie z kolokwίων można uzyskać 0 – 100 pkt.
- Przewiduje się możliwość poprawy każdego kolokwium – w czasie sesji podstawowej lub poprawkowej (do uzgodnienia ze starostą roku). Wynik tego kolokwium jest wiążący.
- Na wszystkie kolokwia należy przynieść:
 - dokument tożsamości (ze zdjęciem),
 - kilka pojedynczych kartek papieru formatu A4,
 - kalkulator (korzystanie z komórki lub pożyczanie kalkulatora od innej Osoby nie będzie możliwe).

- Podstawę oceny ćwiczeń stanowi ilość punktów zdobytych na **dwóch kolokwiach**. Ocena końcowa przyjmowana jest zgodnie z tabelą.

Suma punktów z kolokwίων	ocena
55-62	3
63-71	3+
72-80	4
81-87	4+
88-94	5
95-100	5+

- Osoby, które uzyskają z kolokwίων z semestrów II i III sumę **150 punktów** mogą być zwolnione z egzaminu, który odbędzie się po sem. III, uzyskując ocenę dobry.
- Możliwe jest uzyskanie dodatkowych punktów za **aktywność** na zajęciach.

PROGRAM WYKŁADÓW: SEM. II – 15 GODZ.

- 1-2. Wprowadzenie do przedmiotu, elementy konstrukcyjne.
- 3-4. Statyka elementarna: skalary i wektory, zasady statyki, moment statyczny siły względem punktu, para sił, redukcja płaskiego układu sił, warunki równowagi.
5. Oddziaływania na konstrukcje, siła skupiona, obciążenie ciągłe, moment skupiony.
6. Schematy układów prętowych, węzły, podpory.
7. Podstawowe założenia teorii konstrukcji.
8. Siły wewnętrzne (przekrojowe) w układach prętowych statycznie wyznaczalnych, związki między siłami wewnętrznymi i obciążeniem.
9. Belki proste: belka swobodnie-podparta, belka wspornikowa, belka swobodnie-podparta ze wspornikiem.
10. Układy ramowe: belki załamane, układy trójprzegubowe.

11. Układy łukowe: siły wewnętrzne w prętach zakrzywionych, linia ciśnień.
12. Kratownice, metoda równoważenia węzłów, metoda przekrojów.
13. Układy złożone (belki ciągle przegubowe, układy ramowe i kratowe, ramowo-kratowe).
14. Obciążenia zmienne (użytkowe): linie wpływu, obciążanie linii wpływu, ekstremalne obciążanie linii wpływu.
15. Obwiednie sił wewnętrznych, kombinacja obciążeń.

Plan ćwiczeń w semestrze II – 30 godz.

- Statyka elementarna – 2 godz.
- Reakcje belek prostych – 3 godz.
- Siły wewnętrzne belek prostych – 5 godz.
- Belka ciągła przegubowa – 2 godz.
- Belki załamane – 2 godz.
- **Kolokwium nr 1 – 2 godz.**
- Ramy trójprzegubowe – 2 godz.
- Układy łukowe – 1 godz.
- Kratownice – 3 godz.
- Układy kratowo-ramowe – 1 godz.
- Linie wpływu – 1 godz.
- Ekstremalne obciążenie linii wpływu, obwiednie – 2 godz.
- **Kolokwium nr 2 – 2 godz.**

Funkcja i forma konstrukcji budowlanej

Obiekty wzniesione w Starożytności, budowie renesansu lub baroku powstały w wyniku intuicji, technicznej sprawności i doświadczenia ówczesnych twórców. Obiekt określała funkcja i forma.

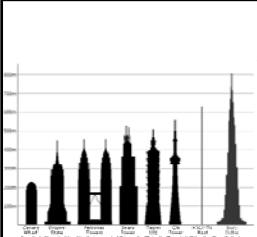


W czasach, w których były wznoszone, nie istniała nauka o konstrukcjach. Rola konstrukcji, choć uświadamiana jedynie intuicyjnie, była jednak zawsze niezwykle ważna.

Konstrukcje i procesy technologiczne towarzyszące budownictwu zaczęły wyraźnie determinować architekturę budowli. Tak więc rola konstrukcji stała się równie ważna, jak jej funkcja i forma architektoniczna.



Hagia Sofia

		Sears Tower Chicago 443 m	
Piramida Cheopsa 147 m (137 m)			Hala Superdome Luizjana, rozpiętość 225 m
		Panteon w Rzymie Kopuła o średnicy 44 m	
		Most na Tybrze Rzym, rozpiętość przęsła 33 m	
		Most Akashi-Kaikyo, rozpiętość przęsła 1999 m	

		Japonia – budynek mieszkalny o wysokości czterech kilometrów, 800 kondygnacji, pół miliona osób.	
Burj Dubai - 828 m			

Rola teorii konstrukcji

Gwałtowny rozwój nauki zmusza do jej podziału na wąskie specjalności, gdyż stało się niemożliwe dogłębne poznanie wielu dziedzin wiedzy przez jednego człowieka.

Nastąpił również podział ról w procesie projektowania budowli, w który z reguły są zaangażowani zarówno architekci, jak i inżynierowie-konstruktorzy.

Nowoczesne projektowanie wymaga opanowania podstaw dyscyplin technicznych niezbędnych do zrozumienia roli i pracy konstrukcji, a więc: **mechaniki teoretycznej**, **mechaniki budowli** i **wytrzymałości materiałów**, obejmujących tzw. **teorię konstrukcji**.

Salvadori M.: „**Konstrukcja jest dla architekta tym, czym adwokat dla pozwanego – złem koniecznym. Nie da się jej jednak uniknąć, bo działają prawa prawa przyrody, którym musi podlegać.**”



Projektowanie konstrukcji

Każda budowla inżynierska musi spełniać szereg warunków jak np. względy estetyczne, eksploatacyjne, techniczne, ekonomiczne, itp. Do najistotniejszych należy jednak zaliczyć **bezpieczeństwo**, zarówno w okresie wznoszenia budowli, jak i późniejszej eksploatacji.

Tę część budowli, która zapewnia jej bezpieczeństwo, i która tworzy jej nośny szkielet nazywamy **konstrukcją**. Przykładowo, konstrukcję mostu kolejowego stanowią stalowe lub żelbetowe dźwigary, natomiast podkłady lub szyny kolejowe do niej nie należą. Podobnie konstrukcją stropu może stanowić płyta żelbetowa, a nie spoczywająca na niej podłoga lub tynk.

Znajomość mechaniki teoretycznej, mechaniki budowli oraz wytrzymałości materiałów pozwala na zaprojektowanie bezpiecznej konstrukcji.

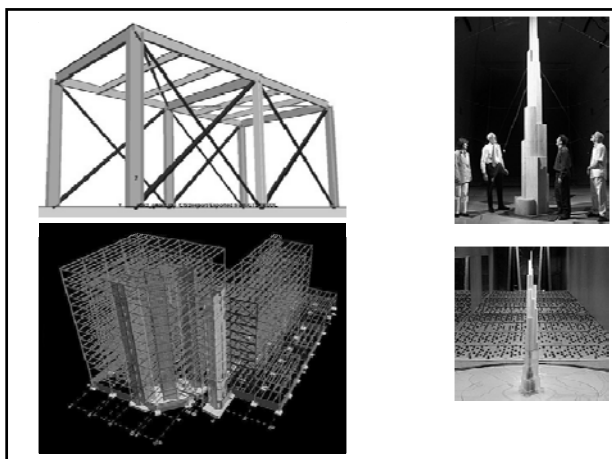
Podstawowe zadanie konstrukcji nośnych stosowanych w budownictwie polega na bezpiecznym przenoszeniu wszelkiego rodzaju obciążeń działających na budowle i przekazywanie ich na fundamenty.

Ocenę pracy konstrukcji budowlanych, w różnych warunkach, inżynier przeprowadza na podstawie statycznej i dynamicznej analizy konstrukcji.

Metody analizy:

– obliczeniowa – tworzenie modeli matematycznych na drodze uogólnień praw zaobserwowanych w doświadczeniach,

– doświadczalna – modele lub rzeczywista konstrukcja.



Ocena negatywna – zmiana projektu (zwiększenie wymiarów, zastosowanie lepszego materiału lub inny schemat statyczny konstrukcji), w przypadku konstrukcji istniejącej jej modyfikacja lub zmiana zakresu obciążeń eksploatacyjnych.

Ocena pozytywna – akceptacja projektu, ewentualna realizacja projektu lub zezwolenie na eksploataowanie analizowanej istniejącej konstrukcji.

Na wszystkich etapach projektowania ogromny wpływ ma ekonomia (koszty konstrukcji, jej projektowania i wykonania)

PROCES PROJEKTOWANIA KONSTRUKCJI

Założenia wstępne

- wybór rodzaju i rozmiarów konstrukcji,
- projekt architektoniczny,
- kształtowanie (wstępne określenie kształtu konstrukcji),
- wstępne wymiarowanie elementów konstrukcyjnych,
- założenia ekonomiczne.

Obliczenia

- określenie rodzaju i wielkości obciążeń,
- ustalenie schematów statycznych,
- obliczanie sił wewnętrznych i przemieszczeń,
- wymiarowanie poszczególnych elementów (weryfikacja wstępnych wymiarów),
- optymalizacja konstrukcji,
- projektowanie szczegółów,
- sporządzanie opisu technicznego i rysunków,
- kosztorys.

Zadania mechaniki budowli – ustalenie schematu statycznego projektowanej konstrukcji oraz obliczenie sił wewnętrznych i przemieszczeń (deformacji).

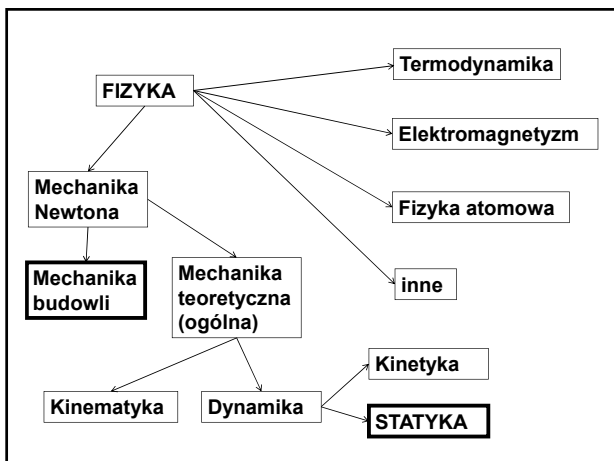
Następnie na ich podstawie, wykorzystując wzory wytrzymałości materiałów, można dobrać wymiary poszczególnych elementów konstrukcyjnych oraz zaprojektować ich szczegóły, np. połączenia.

Pozostałe fazy projektowania są przedmiotem innych dyscyplin naukowych oraz norm, czyli odpowiednich przepisów budowlanych – prawo budowlane.

Projektant (konstruktor) jest odpowiedzialny za prawidłowość rozwiązania konstrukcyjnego.



Wg Kodeksu Hammurabiego (1792 – 1750 p.n.e. , Babilon): Jeżeli budowniczy wybudował dom, a dzieła swego nie wykonał trwale i dom, który wybudował, zawalił się i zabije właściciela domu, budowniczy ten poniesie karę śmierci, a jeżeli zabił przez to syna właściciela domu, będzie zabity syn tego budowniczego.



Mechanika teoretyczna - badanie ciał idealnie sztywnych.

Mechanika budowli - opisuje ciała odkształcalne. Opracowane w mechanice budowli metody umożliwiają wyznaczanie sił wewnętrznych w konstrukcjach.

Wytrzymałość materiałów - wymiarowanie poszczególnych elementów konstrukcyjnych (wykorzystuje analizę teoretyczną oraz badania doświadczalne).

MECHANIKA BUDOWLI

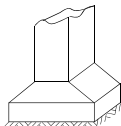
ELEMENTY KONSTRUKCYJNE

W ogólnym przypadku, każda budowla składa się z połączonych ze sobą części o różnych kształtach i wymiarach. Przykładowo, dach i stropy budynku opierają się na ścianach lub słupach, które z kolei są posadawione na fundamentach. W każdej budowlu mogą występować różne elementy, takie jak belki, układy kratowe, ramowe i inne. Nośne szkielety tych części nazywają się elementami konstrukcyjnymi.

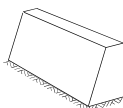
KONSTRUKCJE MASYWNE

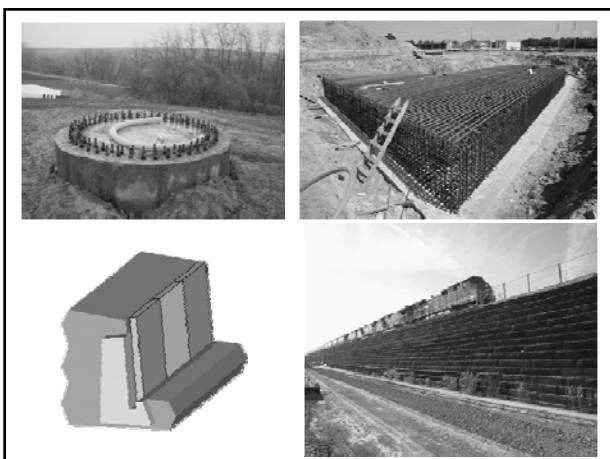
Elementy, których wymiary we wszystkich trzech kierunkach w przestrzeni są liczbami tego samego rzędu, nazywają się **masywnymi**.

stopa fundamentowa



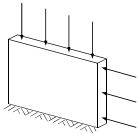
mur oporowy



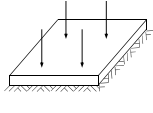


KONSTRUKCJE POWIERZCHNIOWE

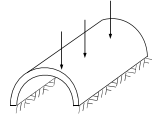
Elementy, których jeden wymiar, zwany grubością, jest zdecydowanie mniejszy od pozostałych, nazywają się **konstrukcjami powierzchniowymi**.



Tarcza



Płyta

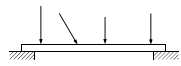


powłoka
cylindryczna

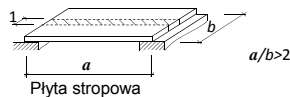


KONSTRUKCJE PRĘTOWE

Element, którego jeden wymiar zwany długością jest wielokrotnie większy od pozostałych dwóch wymiarów, nazywa się **prętem**.



Belka stropowa



Płyta stropowa

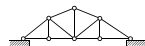
$$a/b > 2$$



Pręt rozciągany



Pręt ściskany (słup)



Pręt jako element
kratownicy

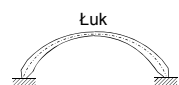
Konstrukcje składające się wyłącznie z prętów noszą nazwę **układów prętowych**. Jeżeli wszystkie pręty układu i wszystkie obciążające siły leżą w jednej płaszczyźnie, to konstrukcja nazywa się **płaskim układem prętowym**.



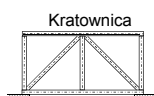
Rodzaje układów prętowych: belki, ramy, łuki, kratownice.



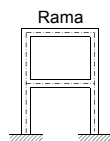
Belka



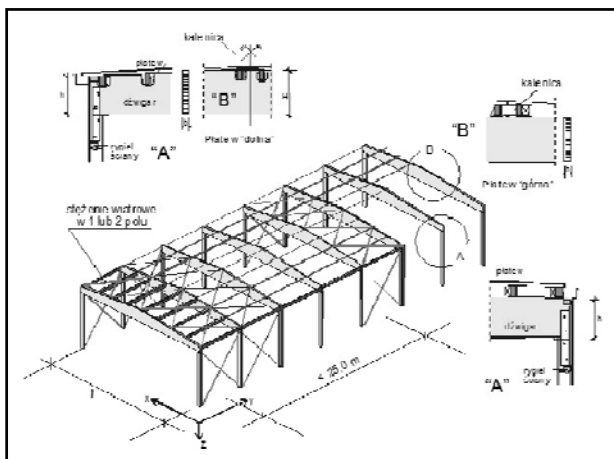
Łuk



Kratownica



Rama





Konstrukcja szkieletowa



Konstrukcja szkieletowa

STATYKA
Podstawowe pojęcia i zasady

MODELE CIAŁ RZECZYWISTYCH

Punkt materialny – ciało o rozmiarach znikomo małych w porównaniu z rozmiarami obszaru, w którym się znajduje; **punkt materialny obdarzony jest masą.**

Pojęcie nie do przyjęcia przez fizykę ale stosowane przez mechanikę do badania ruchu czy spoczynku ciał rzeczywistych.

Zastosowanie w dynamice

Skłasyfikowanie danego ciała jako punktu jest względne.

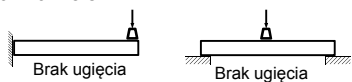
Budynek mieszkalny jako punkt w stosunku do obszaru widzianego z samolotu lecącego na znacznej wysokości.

Budynek mieszkalny z pozycji obserwatora idącego ulicą.

Układ punktów materialnych

Continuum materialne – obszar zajęty przez ciało jest wypełniony materią w sposób ciągły.

Ciało doskonale sztywne (nieodkształcalne) – ciało, którego punkty nie zmieniają wzajemnych odległości pod wpływem działających na nie sił.



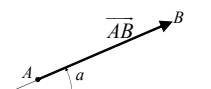
Pojęcie nie do przyjęcia przez teorię wytrzymałości materiałów ale przybliżenie dopuszczalne dla celów statyki.



Rachunek wektorowy – podstawowe definicje

Skalar – wielkość fizyczna całkowicie scharakteryzowana jedną liczbą (np. temperatura, ciśnienie, masa, pole, energia...).

Wektor – obiekt geometryczny w matematyce elementarnej; graficznie przedstawiany jako odcinek, na którym wyróżniono początek i koniec \overline{AB} , \vec{P} , \vec{a} (np. siła, prędkość, przyspieszenie...).



Wektor na płaszczyźnie

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} \quad \vec{P} = [P_x, P_y]$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{P_x}{P} \Rightarrow P_x = P \cos \alpha$$

$$P_y = P \sin \alpha$$

Współrzędne wektora nie ulegną zmianie jeżeli przesuniemy równoległe siłę (zmienimy położenie punktu początkowego).

Wyznaczanie współrzędnych wektora:

$$\vec{P} = P_x \vec{i} + P_y \vec{j} = (x_2 - x_1) \vec{i} + (y_2 - y_1) \vec{j}$$

ZASADY STATYKI

Zasada 1. Działanie dwóch sił \vec{P} i \vec{Q} , przyłożonych w jednym punkcie, można zastąpić siłą wypadkową \vec{W} przyłożoną do tego samego punktu. Wypadkowa \vec{W} jest sumą wektorową $\vec{W} = \vec{P} + \vec{Q}$. Siłę \vec{W} można przedstawić jako wektor będący przekątną równoległoboku zbudowanego na wektorach \vec{P} i \vec{Q} .

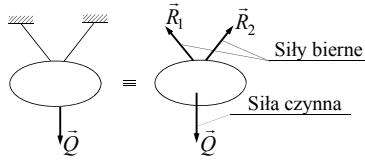
Zasada 2. Dwie siły przyłożone do ciała sztywnego równoważą się tylko wtedy, gdy mają tę samą linię działania, te same wartości liczbowe $|\vec{P}| = P = Q = |\vec{Q}|$ i przeciwne zwroty $\vec{P} = -\vec{Q}$.

Zasada 3. Działanie układu sił przyłożonych do ciała sztywnego nie ulegnie zmianie, gdy do tego układu doda się lub odejmie układ sił równoważących się.

Z zasady tej wynika istotny wniosek, iż każdą siłę działającą na ciało można dowolnie przesuwać wzdłuż jej linii działania.

Zasada 4. Każdemu działaniu towarzyszy przeciwdziałanie, leżące na tej samej prostej, równe co do wartości i o przeciwnym zwrocie. Zasada ta jest równoważna trzeciemu prawu Newtona.

Zasada 5. Każde ciało nieswobodne można myślowo oswobodzić z więzów, zastępując ich działanie reakcjami, a następnie rozpatrywać to ciało jako swobodne, znajdujące się pod działaniem sił czynnych i biernych.



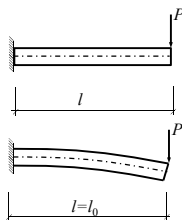
Zasada 6. Zasada zeszywnienia.

Równowaga sił działających na ciało odkształcalne nie zostanie naruszona przez zeszywnienie tego ciała.

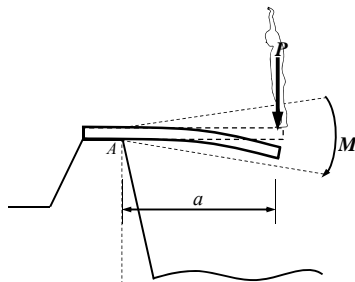
Na tej podstawie można stwierdzić, że **warunki równowagi, jakie muszą spełniać siły działające na ciało sztywne obowiązują również dla ciała odkształcalnego.**

Zasada pozwala rozwiązywać zagadnienia dotyczące równowagi ciał ulegających odkształceniom.

W mechanice budowli (**ciała odkształcalne**) możemy wykorzystać pojęcia mechaniki teoretycznej (**ciała nieodkształcalne**).



MOMENT STATYCZNY SIŁY WZGLĘDEM PUNKTU



Moment statyczny powoduje: obrót i zginanie

Czynnik wywołujący obrót nazywa się **momentem statycznym siły względem punktu O**, zwanego **biegunem**. Wartość tego momentu jest iloczynem siły i odległości jej linii działania od bieguna $M_O = a \cdot P$.

Moment siły względem punktu można przedstawić graficznie, jako łuk zakończony strzałką. Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że moment statyczny \vec{M} jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny, na której położone są wektory \vec{r} i \vec{P} . Aby odróżnić wektory reprezentujące siły i momenty, te ostatnie oznacza się dwiema strzałkami.

Jednostką momentu statycznego w układzie SI jest N·m (Niuton · metr). Zwrot, a zatem i znak momentu zależy od przyjętego zwrotu osi z. **Moment jest dodatni, jeżeli zwrot jego wektora jest zgodny z osią z. Patrząc z dodatniego kierunku osi z na płaszczyznę xy, momenty prawoskrętne wywołujące obrót zgodny z ruchem wskazówki zegara uważa się za ujemne.**

Na płaszczyźnie $r_z = 0$ i $P_z = 0$

$$\vec{M}_O = \vec{M}_z = \vec{k} \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix} = \vec{k} (r_x P_y - r_y P_x) = -\vec{k} a P$$

Moment statyczny siły względem punktu jest równy zero wtedy, gdy punkt ten leży na linii działania siły.

Moment statyczny siły względem punktu jest równy zero wtedy, gdy punkt ten leży na linii działania siły.

PARA SIŁ

Układ dwóch sił równoległych, o równych wartościach, lecz przeciwnie skierowanych zwrotach nazywa się **parą sił**.

$M = (a + x)P - xP = aP$

RÓWNOLEGLE PRZESUNIĘCIE SIŁY

REDUKCJA PŁASKIEGO UKŁADU SIŁ

Redukcja dowolnego układu sił oznacza zastąpienie go przez układ równoważny i możliwie najprostszy.

Układ sił zbieżnych
Jeżeli linie działania wszystkich sił przechodzą przez jeden wspólny punkt, to tworzą tzw. **zbieżny układ sił**.

$$\vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad \vec{W} = W_x \vec{i} + W_y \vec{j}$$

$$W_x = P_{1x} + P_{2x} + \dots + P_{nx} = \sum_{i=1}^n P_{ix} \quad , \quad W_y = P_{1y} + P_{2y} + \dots + P_{ny} = \sum_{i=1}^n P_{iy}$$

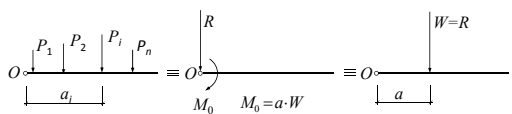
Układ sił dowolnych
Jeżeli linie działania wszystkich sił działających na konstrukcję nie przecinają się w jednym punkcie, to tworzą one tzw. **dowolny układ sił**. Stosuje się dwa sposoby jego redukcji:

- do wypadkowej układu sił,
- do wektora głównego i momentu głównego układu.

$$\vec{W} = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$a = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n a_i P_i \quad M_O = aW = \sum_{i=1}^n a_i P_i$$

Układ sił równoległych



$$\vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i \quad \vec{W} = \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i$$

$$M_O = aW = \sum_{i=1}^n a_i P_i \quad a = \frac{1}{W} \sum_{i=1}^n a_i P_i$$

WARUNKI RÓWNOWAGI



Zbieżny układ sił $\vec{W} = \vec{0} \iff \sum_{i=1}^n P_{xi} = 0, \sum_{i=1}^n P_{yi} = 0$

Płaski zbieżny układ sił jest w równowadze, gdy sumy rzutów wszystkich sił na oś x i równocześnie na oś y są równe zero.

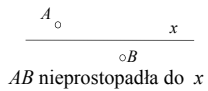
Układ sił dowolnych

$$\vec{R} = \vec{W} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = \vec{0} \quad \text{i} \quad \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \vec{0}$$

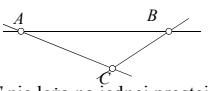
$$\sum P_{xi} = 0, \quad \sum P_{yi} = 0, \quad \sum M_{iO} = 0$$

Dowolny płaski układ sił jest w równowadze, gdy sumy rzutów wszystkich sił na oś x i y oraz jednocześnie suma ich momentów względem dowolnego punktu są równe zero.

$$\sum P_x = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$



$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0$$



A, B i C nie leżą na jednej prostej

W każdym z wymienionych przypadków można napisać nieskończenie wiele równań równowagi. Jednakże **liczba niezależnych równań równowagi** będzie wynosić:

- dwa dla układu sił zbieżnych na płaszczyźnie,
- trzy dla układu sił dowolnych na płaszczyźnie,
- trzy w przypadku układu sił zbieżnych w przestrzeni,
- sześć w przypadku układu sił dowolnych w przestrzeni.

Rozwiązując problem związany np. z układem dowolnych sił na płaszczyźnie, należy zastosować jedną z trzech wersji układów równań równowagi. Liczba równań potrzebnych w tym przypadku do przeprowadzenia obliczeń nie powinna być ani mniejsza, ani większa niż trzy. Inne równania (nieskończenie wiele), które bez problemu będzie można zapisać, na drodze matematycznych przekształceń da się sprowadzić do któregoś ze standardowych związków.

Takie **dotychczasowe równania mogą być natomiast wykorzystane do przeprowadzenia kontroli obliczeń.**

ODDZIAŁYWANIA NA KONSTRUKCJE

Na każdą konstrukcję mogą działać bezpośrednio **obciążenia mechaniczne** lub pośrednio obciążenia związane z deformacją konstrukcji, wynikającą z oddziaływań termicznych, przemieszczenia podpór lub błędów montażowych.

Oddziaływania na konstrukcję mogą być złem koniecznym zarówno dla architekta jak i konstruktora. Nie można minimalizować ich znaczenia.

ODDZIAŁYWANIA TERMICZNE

Klimatyzowane wnętrza z temperaturą ok. 20°C. W lecie słupy zewnętrzne mogą rozgrzać się do 50°C i wydłużyć o 5 – 7 cm w porównaniu do słupów wewnętrznych. W zimie ich temperatura spada do -10°C i kurczą się bardziej niż wewnętrzne.



Spękania od obciążeń grawitacyjnych i termicznych

Stalowe obręcze

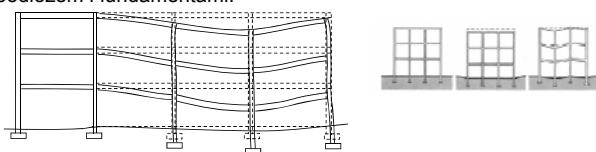
Kopuła Bazyliki Św. Piotra w Rzymie



Budynek firmy ubezpieczeniowej Johna Hancocka w Chicago

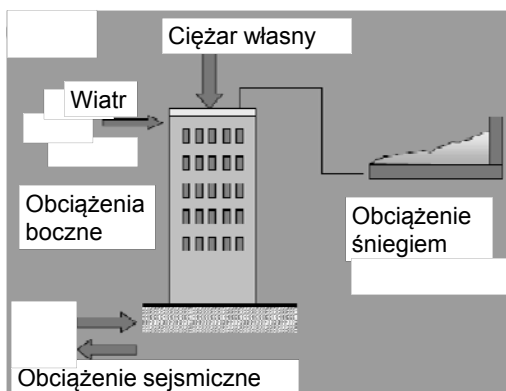
PRZEMIESZCZENIA PODPÓR

Największym zagrożeniem dla obiektów budowlanych są kłopoty z podłożem i fundamentami.

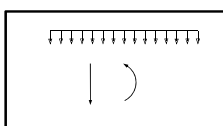


Teatr Narodowy w Mexico City

OBCIĄŻENIA



OBCIĄŻENIA



W zależności od zachowania się w czasie, obciążenia dzielą się na trzy zasadnicze grupy:

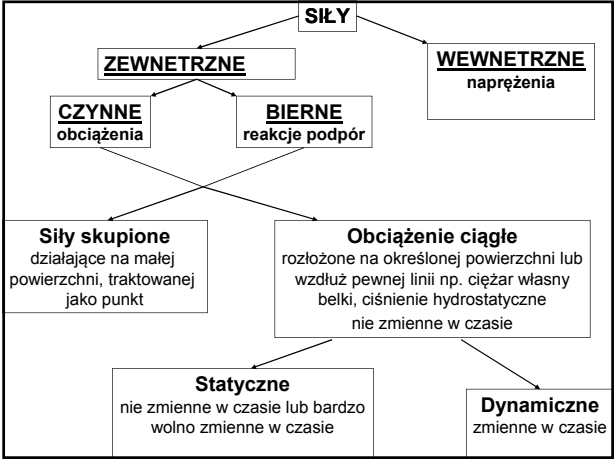
- obciążenia stałe**, np. ciężar własny konstrukcji lub trwałych elementów wykończenia,
- obciążenia zmienne**, np. obciążenie użytkowe, ciężar poruszającego się samochodu, wiatr lub śnieg,
- obciążenia wyjątkowe**, np. uderzenia w konstrukcję czy wybuchy, obciążenia sejsmiczne, obciążenia spowodowane huraganowym wiatrem itp.

W zależności od sposobu przyłożenia, obciążenia dzielą się na **zewnątrzne (powierzchniowe)** i **wewnętrzne (masowe)**. Siły zewnętrzne są przyłożone do powierzchni rozpatrywanej konstrukcji (parcie wiatru, ciężar śniegu). Siły objętościowe zaczepione są w środkach ciężkości każdej cząstki objętości danej konstrukcji i są wynikiem działania np. grawitacji.

Z uwagi na lokalizację w przestrzeni, obciążenia zmienne dzielą się na:


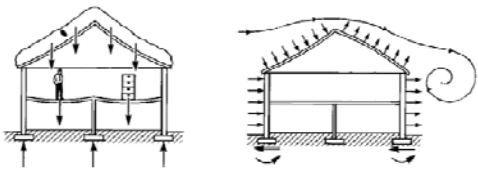
- nieruchome – punkt zaczepienia jest stały, lecz wartość i kierunek zmieniają się w czasie,
- ruchome – stała wartość, lecz zmienny punkt przyłożenia.

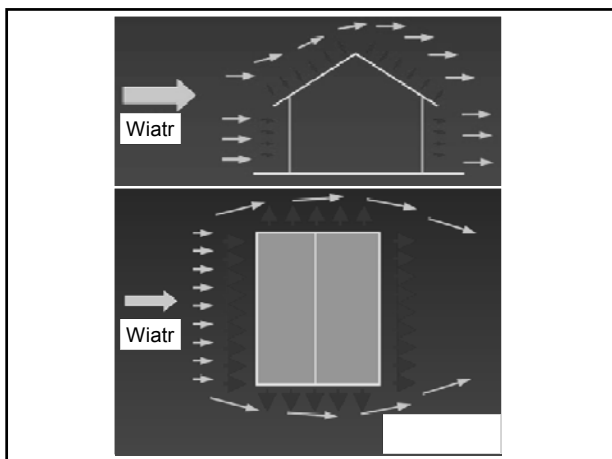
Obciążenia zmienne dzieli się na technologiczne (zależne od funkcji obiektu i sposobu jego użytkowania) i środowiskowe (zależne od środowiska, w którym obiekt się znajduje). Mogą one być w całości długotrwałe (np. parcie wody o stałym poziomie jej zwierciadła), w części długotrwałe (np. obciążenia stropów w pomieszczeniach) lub w całości krótkotrwałe (np. obciążenia śniegiem lub wiatrem).



Obciążeniami zmiennymi w projektowaniu konstrukcji są:

- obciążenie stropów wynikające z użytkowania pomieszczeń (inaczej obciążenie użytkowe),
- obciążenie stropów ściankami działowymi,
- obciążenie śniegiem,
- obciążenie wiatrem,
- dla niektórych konstrukcji inżynierskich także parcie wody.



OBCIĄŻENIA CHARAKTERYSTYCZNE I OBLICZENIOWE

Wartość **charakterystyczną** obciążenia (zwana też normową) przyjmuje się według odpowiednich norm: PN-82/B-02001 (obciążenia stałe), PN-82/B-02003 (obciążenia zmienne technologiczne i montażowe), PN-82/B-02004 (obciążenia pojazdami), PN-86/B-02005 (obciążenia suwnicami pomostowymi, wciągarkami i wciągnikami), PN-80/B-02010 (obciążenie śniegiem) i PN-77/B-02011 (obciążenie wiatrem), PN-88/B-02014 (obciążenie gruntem), PN-86/B-02015 (obciążenie temperaturą).

Wartości charakterystyczne ciężarów objętościowych materiałów konstrukcyjnych:

- cegła pełna 19,0 kN/m³,
- beton niezbrojony 23 kN/m³,
- styropianu 0,45 kN/m³.

Wartości charakterystyczne ciężarów pokryć dachowych:

- blacha fałdowa grubości 1 mm - 0,11 kN/m²,
- dachówka ceramiczna karpówka - 0,90 kN/m².

Wartości charakterystyczne obciążenia użytkowego stropów przyjmuje się według normy PN-82/B-02003. Wartości te są zależne od rodzaju budynku i przeznaczenia pomieszczenia.

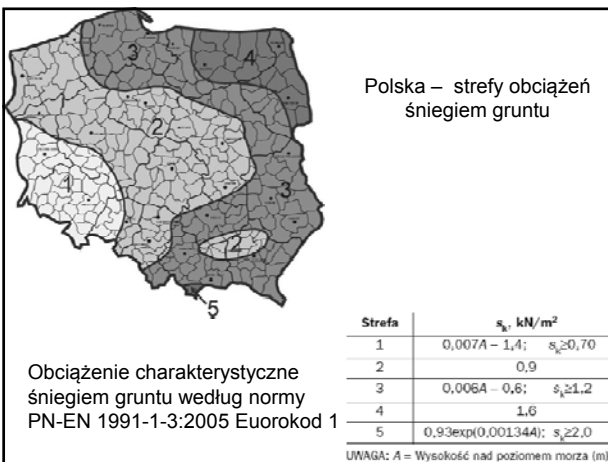
Na przykład dla:

- pokoiów w budynkach mieszkalnych przyjmuje się 1,5 kN/m², sal wykładowych, restauracyjnych, kinowych, teatralnych - 3,0 kN/m²,
- sklepów i powierzchni magazynowych - 7,5 kN/m².

Obciążenie stropów ściankami działowymi przyjmuje się na ogół jako obciążenie zastępcze, rozłożone równo na całej powierzchni stropu i wynoszące około 0,75 kN/m².

Wartość charakterystyczna obciążenia dachu śniegiem zależy od geograficznego położenia budynku oraz kształtu i pochylecia dachu. Teren Polski jest podzielony na cztery strefy, w zależności od wieloletnich średnich opadów śniegu w danych rejonach i najmniejsza wynosi 0,70 kN/m². Największe obciążenie dachów śniegiem jest na terenach górskich.

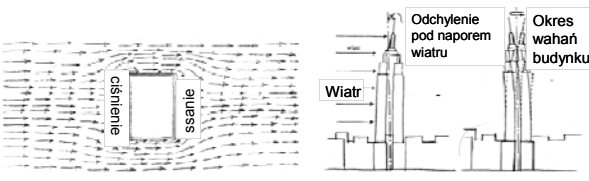
Kształt i nachylenie dachu uwzględnia się, stosując odpowiedni współczynnik (mnożnik), zmniejszający obciążenie przy nachyleniu powyżej 30°. Przy nachyleniu dachu powyżej 60° obciążenia śniegiem nie uwzględnia się, zakładając, że na takim dachu śnieg się nie utrzymuje.



Obciążenie wiatrem jest obciążeniem działającym prostopadle do powierzchni ścian i dachów budynków. Wartość tego obciążenia jest zależna od: położenia geograficznego, wysokości, kształtu i rodzaju budynku oraz rodzaju terenu, na którym ma on być zlokalizowany. Polska jest podzielona na trzy strefy wiatrowe.

Przeważająca większość powierzchni kraju znajduje się w strefie pierwszej o wartości charakterystycznej parcia wiatru wynoszącej 0,25 kN/m². Pozostałe czynniki uwzględnione są w specjalnych współczynnikach – głównie zwiększających wartości podstawowe.





Kształt budynku, wpływ na sąsiada

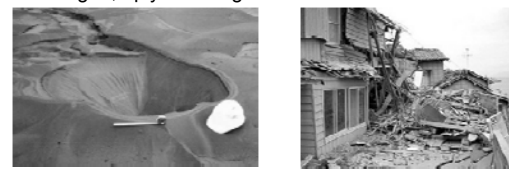
Budynek jako odwrócone wahadło zegara

Efekty statyczne działania wiatru rosną **do kwadratu wraz z wysokością**. Budynek o wysokości 450 m muszą znieść obciążenia pięćdziesiąt razy większe niż budynek o wysokości 60 m.


WTC (412 m) – odchylenie wierzchołków od pionu do 2 m, okres wahań – 10 s.

Obciążenia od wiatru – mosty, wieżowce

Obciążenia sejsmiczne – specjalne fundamenty, dynamiczny tłumik drgań, upłynnienie gruntu



Obciążenia od falowania



Rezonans – silnik, dzwon, most

Wartości obliczeniowe obciążenia ustala się mnożąc jego wartości charakterystyczne przez współczynniki obciążenia (częściowe współczynniki bezpieczeństwa) – według zależności:

$$F_d = F_k \cdot \gamma_f$$

gdzie: F_d – wartość obliczeniowa obciążenia,
 F_k – wartość charakterystyczna obciążenia,
 γ_f – współczynnik obciążenia ($\gamma_f = 0,8 \div 1,4$).

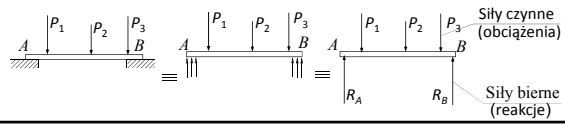
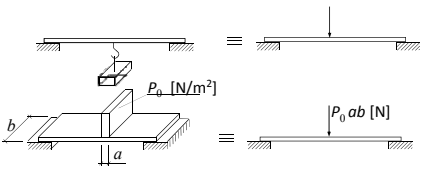
Wartości $\gamma_f < 1,0$ należy stosować wówczas, gdy zmniejszenie obciążenia powoduje zmniejszenie bezpieczeństwa konstrukcji (np. przy sprawdzaniu konstrukcji na stateczność)

W trakcie prac projektowych wszystkie występujące obciążenia uwzględnia się równocześnie, przewidując ich najbardziej niekorzystne zestawienie.

SIŁA SKUPIONA

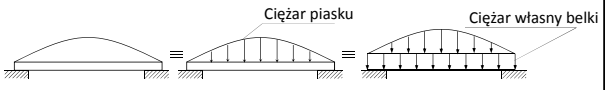
Jednostkę sił (SI) – 1 N (niuton). Jest to siła, która masie 1 kg nadaje przyspieszenie 1 m/s². W praktyce, często stosuje się kN (kiloniuton) lub MN (meganiuton). Siła jest miarą wzajemnego oddziaływania ciał, przejawiającego się wyprowadzeniem (utrzymaniem) ich ze stanu spoczynku lub zmianą ich ruchu.

Siła jest wektorem i jest określona poprzez jej wartość, kierunek, zwrot i punkt zaczepienia lub linię działania.

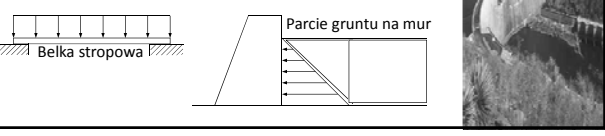


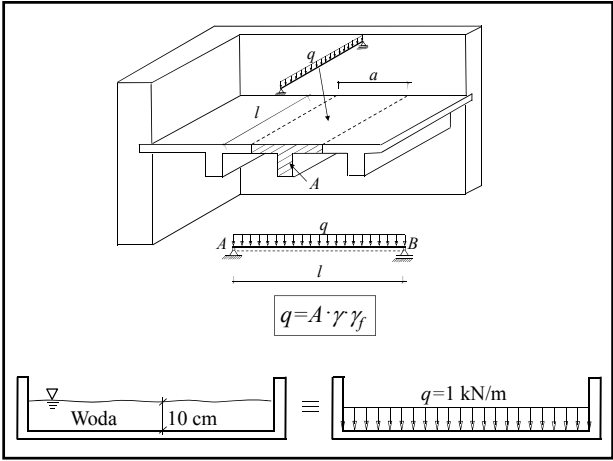
OBCIĄŻENIE CIĄGŁE

Miarą wartości obciążenia ciągłego jest liczba jednostek siły przypadająca na jednostkę powierzchni [N/m²], a w przypadku pręta na jednostkę długości [N/m].



Jeżeli wartość obciążenia jest w każdym punkcie jednakowa to obciążenie takie nazywa się **równomiernym**. Pozostałe obciążenia ciągłe nie spełniające tego założenia nazywa się **nierównomiernymi**.





Wypadkowa obciążenia ciągłego i jej linii działania

$$W = \int_{x_A}^{x_B} q(x) dx$$

Moment M_W wypadkowej W względem punktu O : $M_W = x_W W$

Moment M_p obciążenia ciągłego względem tego samego punktu O : $M_p = \int_{x_A}^{x_B} q(x) x dx$

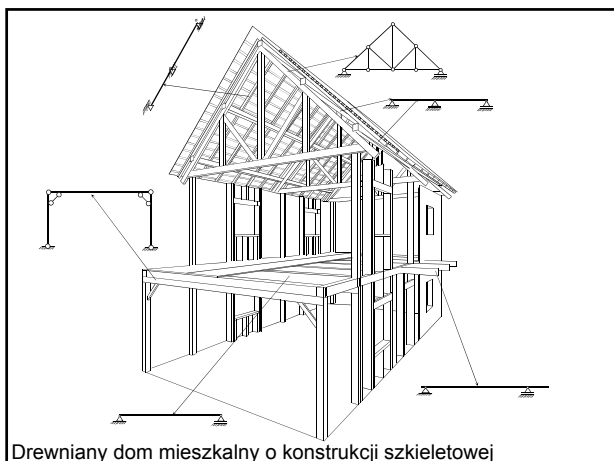
$$x_W = \frac{1}{W} \int_{x_A}^{x_B} q(x) x dx$$

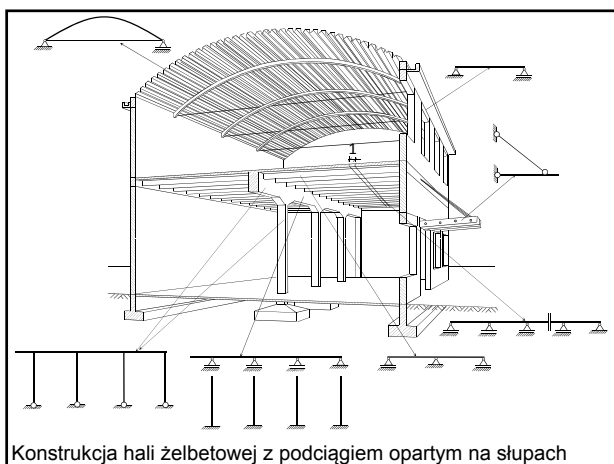
MOMENT SKUPIONY

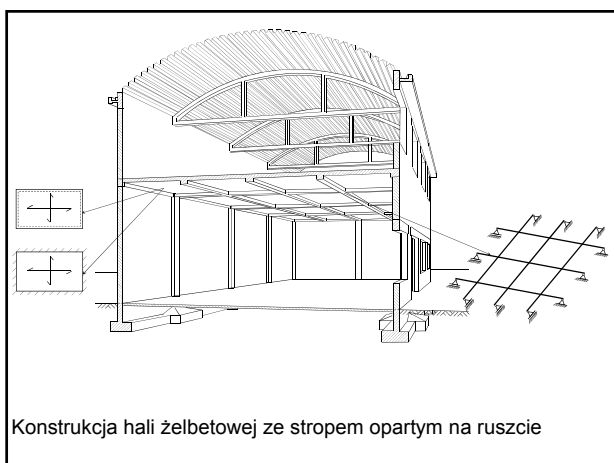
W praktyce budowlanej obciążenie momentem skupionym występuje bardzo rzadko. W zagadnieniach dynamicznych może ono wynikać np. z pracy maszyn. Obciążenie momentem skupionym jest jednak często wykorzystywane jako element pomocniczy w obliczeniach przemieszczeń układów prętowych oraz w analizie układów statycznie niewyznaczalnych.

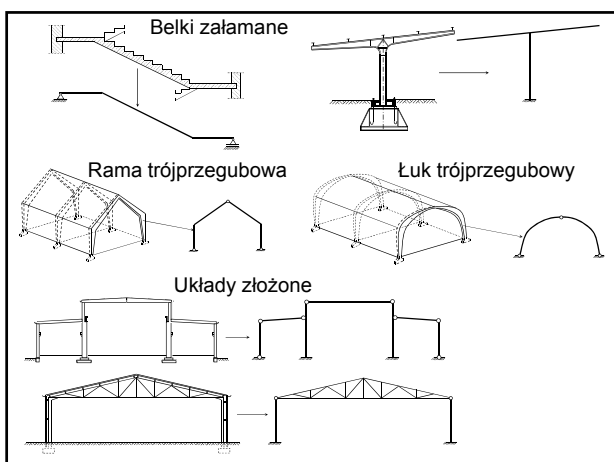
SCHEMATY UKŁADÓW PRĘTOWYCH

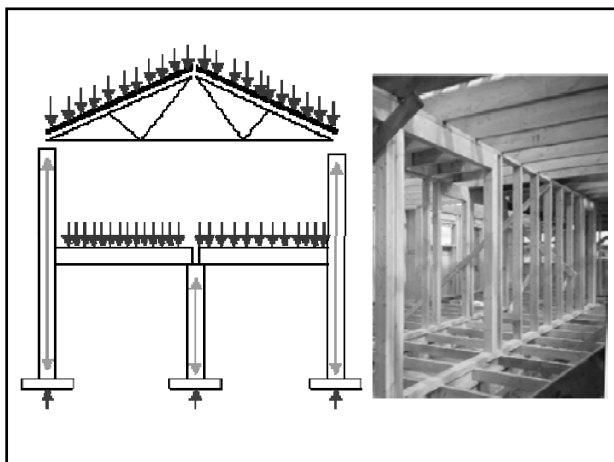
Schemat statyczny konstrukcji odzwierciedla wzajemny układ elementów nośnych, ich długości, sposób połączenia ze sobą oraz z podłożem a także ich obciążenie.

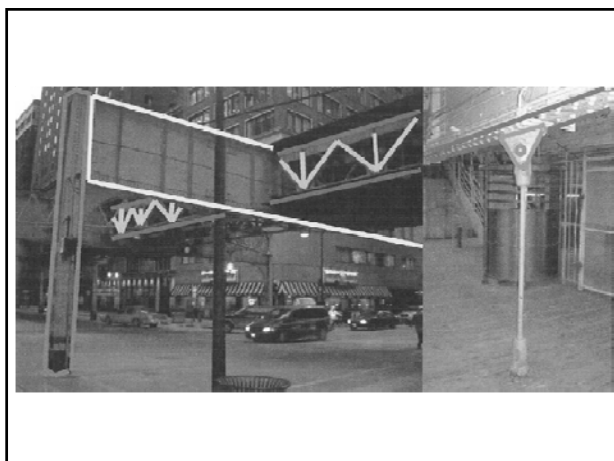












Przykłady belek swobodnie podpartych wraz z zaznaczonym schematem statycznym.



Belka swobodnie podparta



Belka swobodnie podparta



Belka wspornikowa



Belka wspornikowa





Belka podsuwnicowa



Słup



Belka ciągła





Rama płaska



Łuk



Gateway Arch, St. Louis, USA.
Najwyższy na świecie pomnik
(192 metry wysokości).

Kratownica

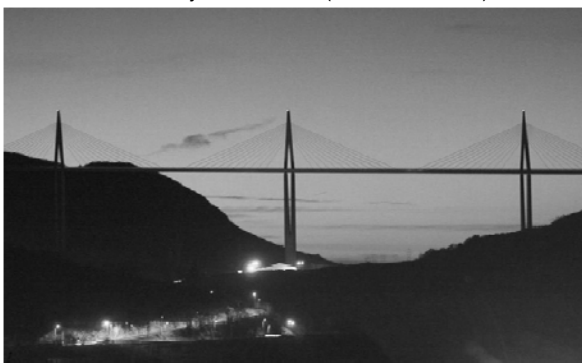






Najwyższym masztem radiowym na świecie był maszt w Gąbinie. Miał wysokość 646,38 metrów. Wybudowany w 1974 roku służył do nadawania programu I Polskiego Radia. Program był słyszalny w całej Europie, Afryce Północnej i dużej części Azji (czasami w Ameryce Północnej). Maszt runął 8 sierpnia 1991 na skutek źle prowadzonych prac konserwatorskich (nie został odbudowany).

Konstrukcja „mieszana”, (ramowo-kratowa)



Wiadukt Millau, Francja. Jest to most o najwyższym pilarze na świecie - 341 metrów.

Konstrukcje drewniane



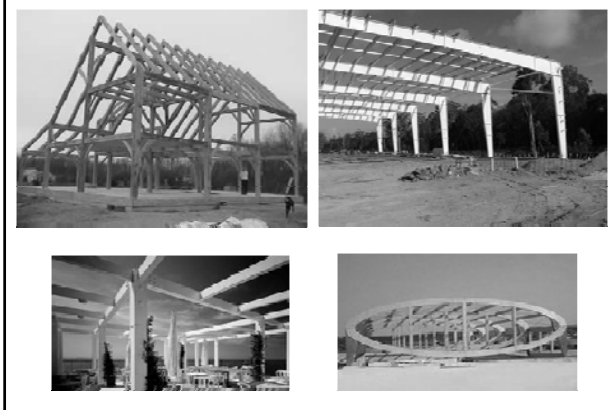
Konstrukcje stalowe

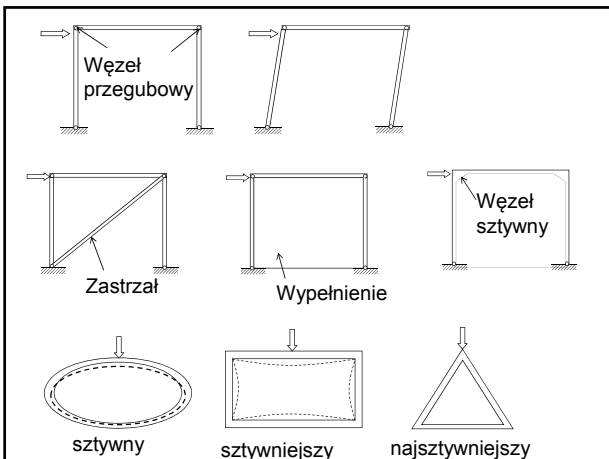


Konstrukcje betonowe i żelbetowe

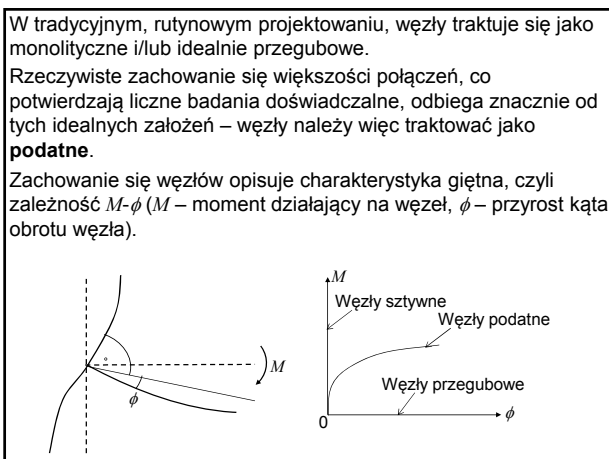


Konstrukcja szkieletowa



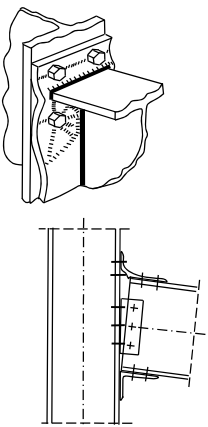


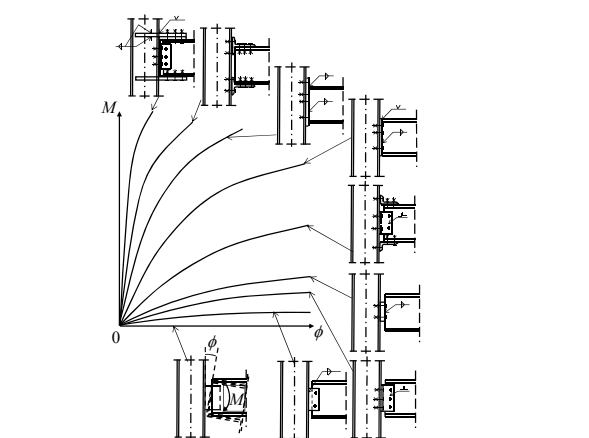





Główne źródła odkształcalności węzłów, wpływające na ich charakterystykę to:

- odkształcenia panelu środknika pod wpływem sił z pasów oraz ścinania,
- odkształcenia części składowych węzła i połączeń: śrub, nakładek, blach węzłowych, blach doczołowych.





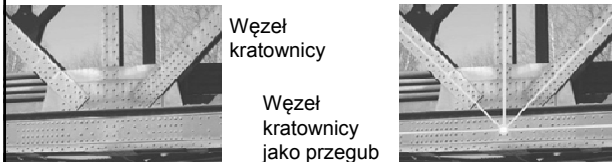


Przegub walcowy Przegub kulisty

PRZYKŁADY POŁĄCZEŃ PRZEGUBOWCH



Przegub łączący dwa pręty



Węzeł
kratownicy

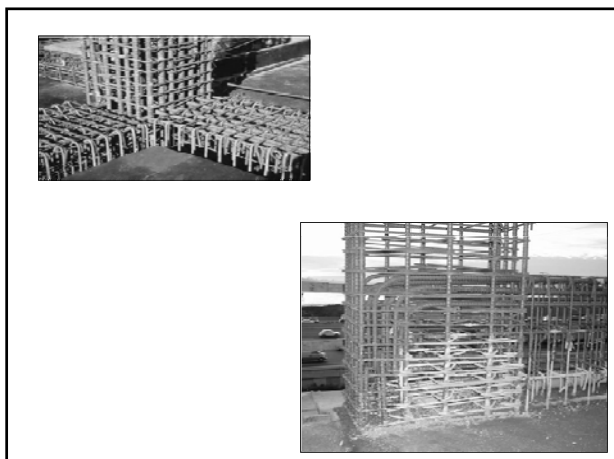
Węzeł
kratownicy
jako przegub

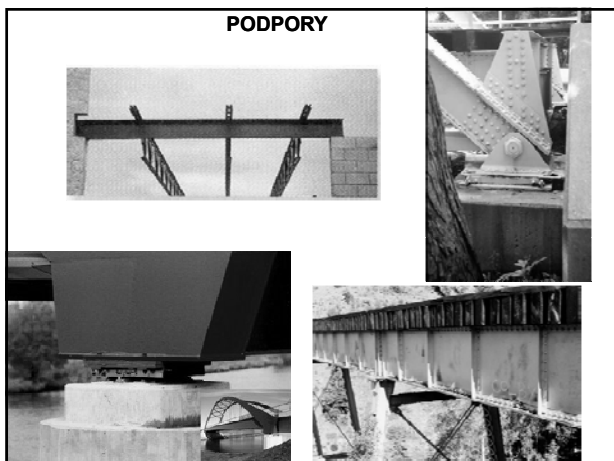


PRZYKŁADY POŁĄCZEŃ MONOLITYCZNYCH









Podpora przegubowo-przesuwna eliminuje przesunięcie w jednym kierunku, a pozwala na swobodne przesunięcie w kierunku doń prostym oraz na swobodny obrót elementu podpartego.

Reakcja R

Ściana (słup) odkształcalna

Gładka podkładka

Przesunięcie

Podpora przegubowo-nieprzesuwna pozwala tylko na obrót, nie pozwala natomiast ani na poziome, ani na pionowe przesunięcie.

Reakcja H i R

Brak przesunięcia

Sztywne utwierdzenie końca pręta, zwane **utwierdzeniem** lub **zamocowaniem** uniemożliwia zarówno przesunięcie poziome i pionowe, jak i obrót końca pręta.

Reakcje H , R i M

ściana

deski

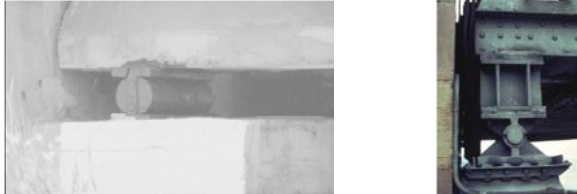
słup

wsporniki szkieletowe

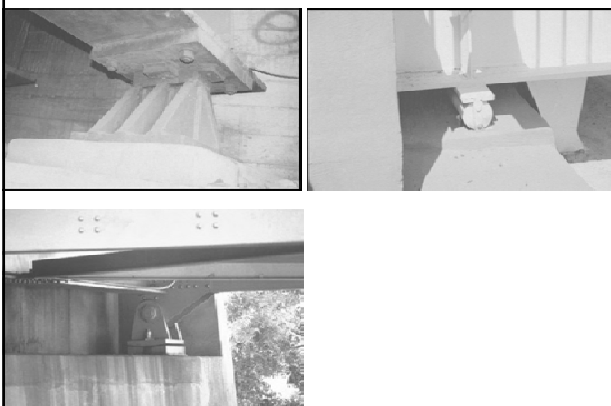
Podpora przegubowo-przesuwna belki stalowej



Podpora przegubowo-przesuwna belki żelbetowej



Podpora przegubowo-nieprzesuwna belki stalowej





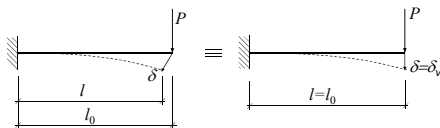
Utwierdzenie ramy wraz ze schematem statycznym



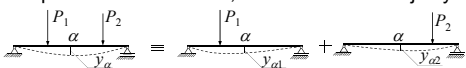
Szczegół podparcia ramy za pomocą utwierdzenia

PODSTAWOWE ZAŁOŻENIA TEORII KONSTRUKCJI

- Założenie statyczności obciążeń.** Przyjmuje się, że działające na konstrukcję siły wzrastają od wartości zerowej aż do ich ostatecznej wartości w sposób ciągły i nieskończenie powolny, co pozwala na pominięcie sił bezwładności.
- Założenie o małych odkształceniach (przemieszczeniach)** pozwala rozwiązywać zagadnienia dotyczące równowagi układów ulegającym odkształceniom.



- Zasada superpozycji.** Zakłada się, że poszczególne siły działają niezależnie od siebie. W wyniku tego reakcje podporowe, siły wewnętrzne lub odkształcenia konstrukcji spowodowane łącznym działaniem układu sił są równe sumie odpowiednich wielkości, od działania każdej z tych sił z osobna.



$$y_{\alpha} = y_{\alpha 1} + y_{\alpha 2}$$

Każdy układ, dla którego zależności między obciążeniem a siłami wewnętrznymi są liniowe, nazywamy **układem liniowym geometrycznie** (małe odkształcenia i przemieszczenia).

Układ jest liniowy fizycznie, jeżeli zależności między odkształceniami i obciążeniami (ściśle naprężeniami) są liniowe (Prawo Hooke'a).


Układ liniowy geometrycznie i fizycznie nazywamy **układem liniowym**. Liniowość układu jest warunkiem wystarczającym i koniecznym stosowania zasady superpozycji.

4. Założenie ciągłości, jednorodności i izotropii materiału.
Ciągłość materiału oznacza, że wypełnia on dane ciało w sposób ciągły. Materiał jest **jednorodny**, jeżeli w każdym punkcie danego ciała ma takie same właściwości mechaniczne (wytrzymałość, odkształcalność). Materiał **izotropowy** to taki, w którym właściwości te są jednakowe we wszystkich kierunkach; materiał niespełniający tego założenia nazywa się anizotropowym (np. drewno).

Założenie ciągłości pozwala do opisu zachowania się materiału rachunku różniczkowego i całkowego.

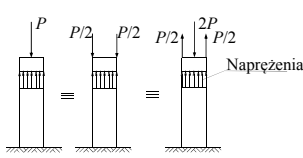
Podstawowe materiały budowlane, takie jak stal i beton, można uznać za ciągłe, jednorodne i izotropowe.

5. Założenie płaskich przekrojów (Bernoulliego). Przyjmuje się, że przekrój płaski, przeprowadzony w sposób myślowy w ciele nieodkształconym, może zmienić swe położenie po odkształceniu, ale pozostaje nadal płaski.



Płaskie przekroje

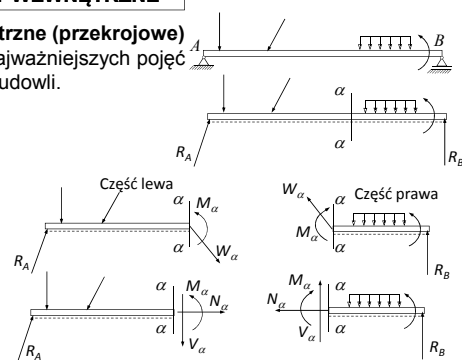
6. Zasada de Saint-Venanta. Zakłada się, że przyłożona w danym miejscu siła wpływa tylko w bliskim sąsiedztwie na rozkład naprężeń (siły wewnętrzne rozłożone na powierzchni przekroju).



Naprężenia

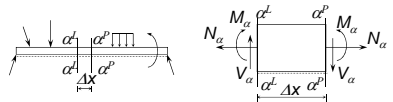
SIŁY WEWNĘTRZNE

Siły wewnętrzne (przekrojowe) to jedno z najważniejszych pojęć mechaniki budowlanej.




M_α V_α N_α - składowe sił wewnętrznych
 M_α - moment zginający, V_α - siła poprzeczna, N_α - siła podłużna

Sily wewnętrzne występują w każdym przekroju konstrukcji i są one wypadkowymi.

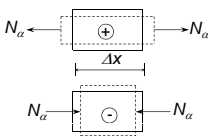


Moment zginający M_α w dowolnym przekroju poprzecznym $\alpha-\alpha$ pręta jest równy sumie momentów statycznych wszystkich sił działających z lewej (prawej) strony rozważanego przekroju, liczonych względem środka ciężkości tego przekroju. Moment ten jest dodatni, gdy rozciągane są włókna spodu pręta. Moment określamy jako ujemny, jeżeli jego działanie powoduje ściskanie przyjętych spodów.



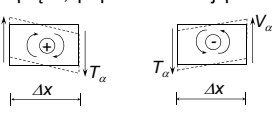
Siła podłużna (normalna) N_α w dowolnym przekroju poprzecznym $\alpha-\alpha$ pręta jest równa sumie rzutów wszystkich sił działających z lewej (prawej) strony rozważanego przekroju, na kierunku prostej stycznej do osi pręta, poprowadzonej przez środek ciężkości przekroju.

Siła podłużna jest dodatnia, jeżeli działa na przekrój rozciągająco, i ujemna, gdy działa ścisakująco.

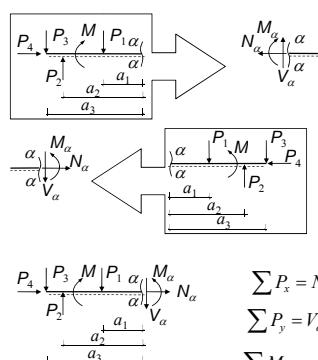


Siła poprzeczna V_α (tnąca T_α) w dowolnym przekroju poprzecznym $\alpha-\alpha$ pręta jest równa sumie rzutów wszystkich sił działających z lewej (prawej) strony rozważanego przekroju, na kierunku prostej prostopadłej do osi pręta, poprowadzonej przez środek ciężkości przekroju.

Siła poprzeczna jest dodatnia, gdy na prawą część pręta działa do góry, a na lewą do dołu.



Obliczenia sił wewnętrznych można przeprowadzić albo na podstawie definicji, albo wykorzystując **warunki równowagi**, zapisane dla wyodrębnionych fragmentów układu.



Z definicji

$$N_\alpha = -P_4$$

$$V_\alpha = P_2 - P_1 - P_3$$

$$M_\alpha = M + P_2 \cdot a_2 - P_1 \cdot a_1 - P_3 \cdot a_3$$

Z warunków równowagi

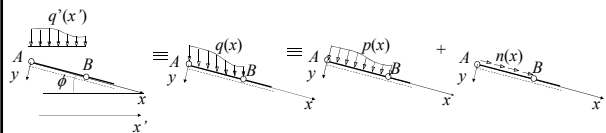
$$\sum P_x = N_\alpha + P_4 = 0$$

$$\sum P_y = V_\alpha + P_1 + P_3 - P_2 = 0$$

$$\sum M_{(\alpha)} = M_\alpha + P_1 \cdot a_1 + P_3 \cdot a_3 - P_2 \cdot a_2 - M = 0$$

Wartości sił wewnętrznych, obliczone w tym samym punkcie z obu stron przekroju, muszą być sobie równe. A więc można przeprowadzać obliczenia sił wewnętrznych z dowolnej strony przekroju belki. Zazwyczaj wybiera się tę stronę, z której wykonanie odpowiednich działań będzie łatwiejsze.

ZWIĄZKI MIĘDZY SIŁAMI WEWNĘTRZNYMI I OBCIĄŻENIEM



$p(x)$ – obciążenie poprzeczne (dodatnie, jeżeli działa ku spodowi pręta),
 $n(x)$ – obciążenie osiowe (dodatnie, jeżeli ma zwrot zgodny z osią x).

The diagram shows a beam element of length Δx between points A and B. Internal forces at A are $N(x)$ (normal), $V(x)$ (shear), and $M(x)$ (moment). At B, they are $N(x+\Delta x)$, $V(x+\Delta x)$, and $M(x+\Delta x)$. External loads are $p(x)\Delta x$ (normal) and $n(x)\Delta x$ (axial).

$$\sum P_x = N(x+\Delta x) - N(x) + n(x)\Delta x = 0$$

$$\sum P_y = V(x+\Delta x) - V(x) + p(x)\Delta x = 0$$

$$\sum M_C = M(x+\Delta x) - M(x) - V(x)\Delta x + p(x)\Delta x \frac{\Delta x}{2} = 0$$

$$\frac{N(x+\Delta x) - N(x)}{\Delta x} = -n(x)$$

$$\frac{V(x+\Delta x) - V(x)}{\Delta x} = -p(x)$$

$$\frac{M(x+\Delta x) - M(x)}{\Delta x} = V(x)$$

$$\frac{dN(x)}{dx} = -n(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = -p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = V(x)$$

W niektórych przypadkach obliczenia łatwiej jest przeprowadzić, przyjmując oś x skierowaną w stronę przeciwną i wtedy wyrażenia znajdujące się po prawej stronie zależności różniczkowych zmienią znaki na przeciwne.

$$\frac{dN(x)}{dx} = n(x)$$

$$\frac{dV(x)}{dx} = p(x)$$

$$\frac{dM(x)}{dx} = -V(x)$$

Przedstawione zależności różniczkowe spełniają ważną rolę w analizie układów prętowych i noszą nazwę **równań różniczkowych równowagi elementu pręta**. Istotne jest zwłaszcza ostatnie z równań, które może służyć między innymi do kontrolowania zgodności wykresów sił poprzecznych i momentów zginających.

Graficzna prezentacja sił wewnętrznych jest bardzo ważna, gdyż na jej podstawie można uzyskać na ogół więcej informacji, niż analizując nawet najprostsze równanie. Wykresy sporządzamy, odkładając od osi pręta, w obranej skali, rzędne odpowiednich funkcji.

Rysując wykresy sił wewnętrznych, przyjmuje się **konwencję**, według której **wartości dodatnie momentów zginających umieszcza się po stronie spodu pręta**, a ujemne po stronie przeciwnej. Wykresy sił poprzecznych rysuje się odwrotnie, czyli po stronie spodu odklada się wartości ujemne. Zerowe siły wewnętrzne oznacza się dwiema pochyłymi kreskami.

$M' = V$
 $V' = -q$

$q=0$
 $V=a$
 $M=a x+b$

- Jeżeli wykres sił poprzecznych będzie opisany prostą poziomą, to wykres momentów zginających jest opisany równaniem prostej nachylonej.
- Pochodna funkcji rosnącej jest dodatnia, a malejącej – ujemna, zatem moment zginający rośnie w przedziałach, w których siła poprzeczna jest dodatnia i maleje w przedziałach, w których jest ujemna.
- W przypadku działania na układ siły skupionej, w miejscu jej zaczepienia wystąpi nieciągłość na wykresie sił poprzecznych.

$M' = V$
 $V' = -q$

$q=0$
 $V=0$
 $M=a$

- W przypadku działania na układ momentu skupionego, w miejscu jego zaczepienia wystąpi nieciągłość na wykresie momentów zginających.
- Wartości maksymalne momentu zginającego mogą również wystąpić w punktach przyłożenia sił skupionych, w których siła poprzeczna jest nieciągła i przecina oś x , natomiast wykres momentów jest załamany.

$M' = V$
 $V' = -q$

$M = a x^2 + b x + c$ $V = 2 a x + b$ $q = -2 a$

- Jeżeli wykres siły poprzecznej będzie opisany równaniem prostej o współczynniku kierunkowym różnym od zera, to wykres momentów zginających jest opisany parabolą.
- Dla znalezienia ekstremum dowolnej funkcji, przyrównuje się jej pochodną do zera, a więc ekstrema momentu zginającego znajdują się w miejscach zerowania się siły poprzecznej.

Wykres momentów zginających jest zakrzywiony (załamany) wypukłością w tę stronę, w którą działa obciążenie ciągłe (siła skupiona).

Siły wewnętrzne – równania różniczkowe równowagi

Równania różniczkowe równowagi elementu pręta pozwalają na optyczne sprawdzenia wykresów.

Obciążenie	Wykres V	wykres M
Między siłami skupionymi	stały	liniowy
Ciągłe prostokątne	liniowy	parabola
Ciągłe trójkątne	parabola	krzywa 3 ^o
Siła skupiona	skok	załamanie
Moment skupiony	–	skok

Dodatkowo:

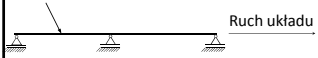
- **Ekstremum momentu występuje w punkcie gdzie $V=0$,**
- **W przegubie $M=0$.**

Przyrost siły poprzecznej (podłużnej) między dwoma punktami osi pręta jest równy minus umownemu polu wykresu obciążenia ciągłego poprzecznego (osiowego) zawartego między tymi punktami.

Przyrost momentu zginającego między dwoma punktami osi pręta jest równy umownemu polu wykresu siły poprzecznej zawartego między tymi punktami.

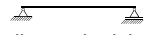
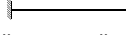
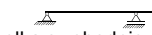
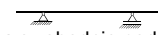
BELKI PROSTE

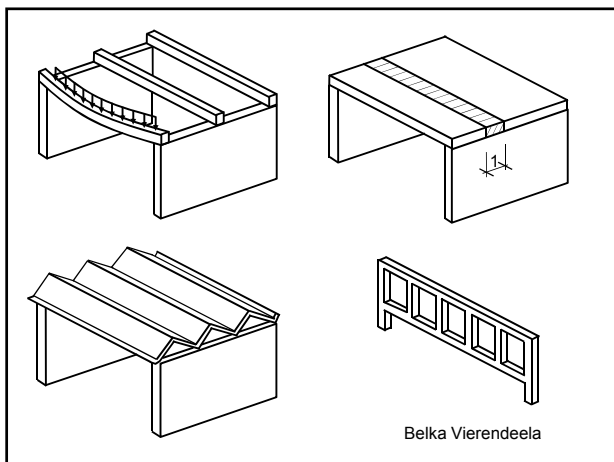
Płaski, dowolny układ prętowy określa się jako **statycznie wyznaczalny**, jeżeli do jego rozwiązania, czyli wyznaczenia wszystkich reakcji i sił wewnętrznych, wystarczą tylko trzy równania równowagi. Jednakże jest to tylko warunek konieczny, ale niewystarczający, statycznej wyznaczalności.



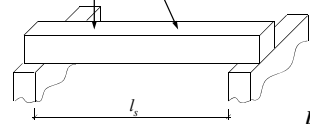
Mechanizm, układ chwiejny lub geometrycznie zmienny

Pręt odpowiednio podparty i obciążony siłami prostopadłymi lub ukośnymi do jego osi nazywany jest **belką**.

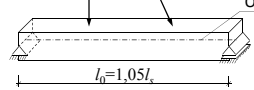
	
belka swobodnie podparta	belka wspornikowa
	
belka swobodnie podparta ze wspornikiem	belka swobodnie podparta ze wspornikami



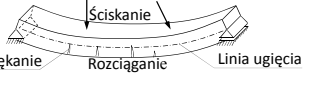
BELKA SWOBODNIE PODPARTA Jeden z najstarszych elementów konstrukcyjnych, i najczęściej występujący w praktyce budowlanej.




l_s - rozpiętość w świetle ścian



$l_0 = 1,05 l_s$ - rozpiętość obliczeniowa

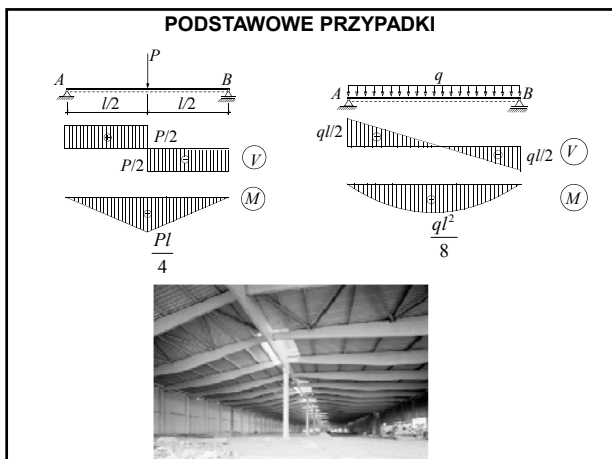


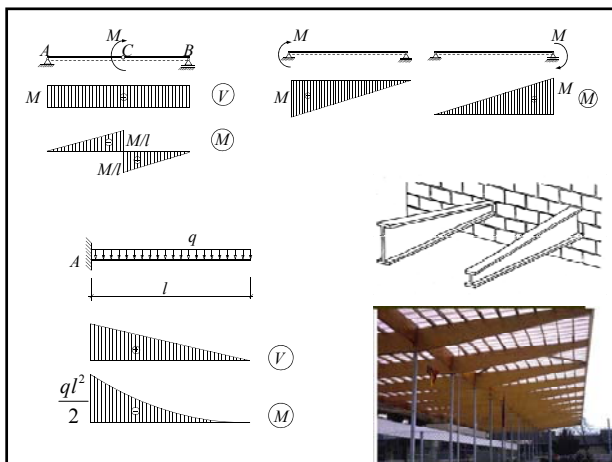
Ściskanie
Rozciąganie
Linia ugięcia

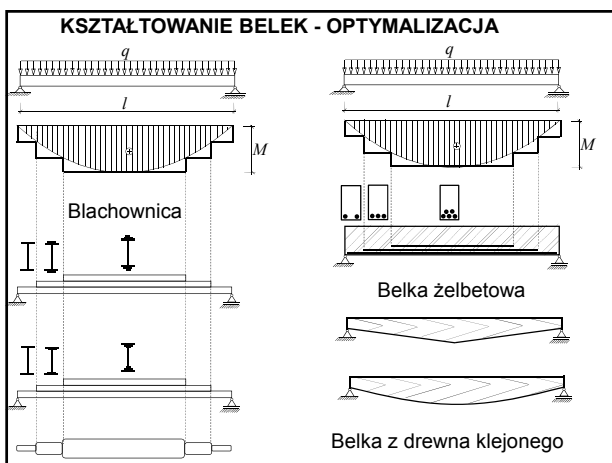


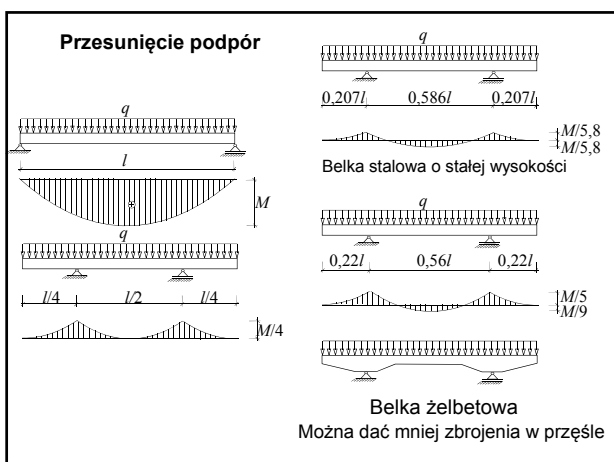
Pręty zbrojeniowe

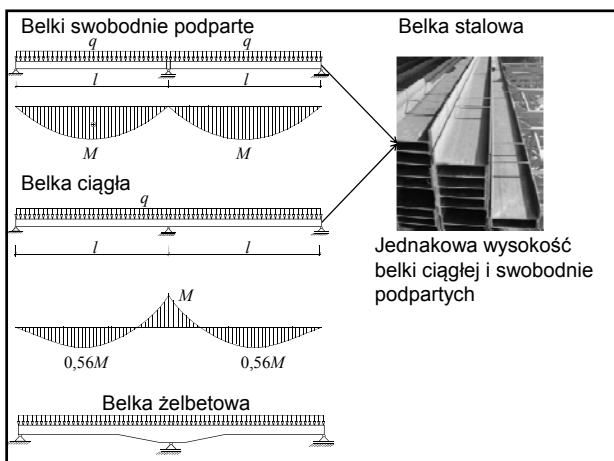
Część belki zawartą między podporami nazywa się **przęsłem**. Zamiast używać pojęcia **długość belki**, mówi się, że przęsło ma **rozpiętość l** .













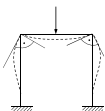
UKŁADY RAMOWE

Konstrukcje składające się z prętów prostoliniowych, połączonych ze sobą w węzłach w sposób sztywny lub przegubowy, nazywają się ramami.

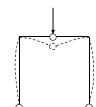


Belka załamana Rama trójprzegubowa

Sztywność węzła uniemożliwia wzajemny obrót połączonych w nim prętów.

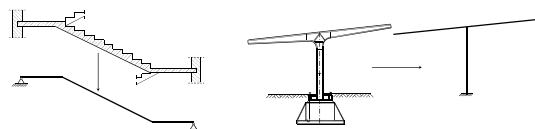
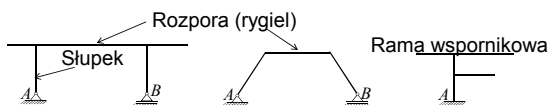


Połączenia przegubowe umożliwiają swobodny obrót łączonych prętów.

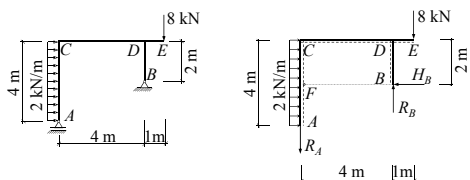


BELKI ZAŁAMANE

Belkami załamanymi nazywane są układy prętowe podparte na dwóch podporach, przegubowo-przesuwnej i nieprzesuwnej, o prostokątnej siatce prętów lub prętach ukośnych.



Tak jak w przypadku belek prostych, umiejętne stosowanie równań równowagi prowadzi do niezależnego obliczenia kolejnych składowych reakcji belek załamanych.



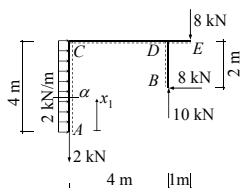
$$\sum P_x = H_B - 2 \cdot 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad H_B = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 4R_A - 8 \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A = 2 \text{ kN}$$

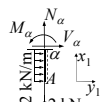
$$\sum M_F = 4R_B - 8 \cdot 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = 10 \text{ kN}$$

Sprawdzenie $\sum P_y = R_A - R_B + 8 = 2 - 10 + 8 = 0$

Równania sił wewnętrznych należy zapisywać oddzielnie dla każdego elementu konstrukcji. Równania te będą się zmieniać w węzłach układu oraz w punktach zmiany typu (funkcji) obciążenia.

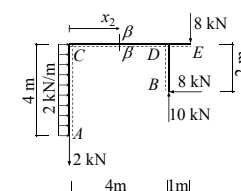


$A-C: 0 \leq x_1 \leq 4 \text{ m}$ $\sum P_{x_1} = 0 \Rightarrow N_\alpha(x_1) = 2 \text{ kN}$

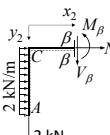


$\sum P_{y_1} = 0 \Rightarrow V_\alpha(x_1) = -2x_1$

$\sum M_{(\alpha)} = 0 \Rightarrow M_\alpha(x_1) = -\frac{2 \cdot x_1^2}{2} = -x_1^2$

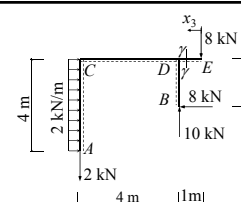


$C-D: 0 \leq x_2 \leq 4 \text{ m}$ $\sum P_{x_2} = 0 \Rightarrow N_\beta(x_2) = -4 \cdot 2 = -8 \text{ kN}$

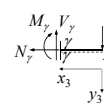


$\sum P_{y_2} = 0 \Rightarrow V_\beta(x_2) = -2 \text{ kN}$

$\sum M_{(\beta)} = 0 \Rightarrow M_\beta(x_2) = -2x_2 - 2 \cdot 4 \cdot 2 = -2x_2 - 16$



$D-E: 0 \leq x_3 \leq 1 \text{ m}$ $\sum P_{x_3} = 0 \Rightarrow N_\gamma(x_3) = 0$



$\sum P_{y_3} = 0 \Rightarrow V_\gamma(x_3) = 8 \text{ kN}$

$\sum M_{(\gamma)} = 0 \Rightarrow M_\gamma(x_3) = -8x_3$

$B-D: 0 \leq x_4 \leq 2 \text{ m}$

$$\sum P_{x_4} = 0 \Rightarrow N_{\delta}(x_4) = -10 \text{ kN}$$

$$\sum P_{y_4} = 0 \Rightarrow V_{\delta}(x_4) = 8 \text{ kN}$$

$$\sum M_{(\delta)} = 0 \Rightarrow M_{\delta}(x_4) = -8x_4$$

Prawidłowość rozwiązania można sprawdzić analizując np. równowagę wszystkich składowych sił wewnętrznych, działających na węzeł D .

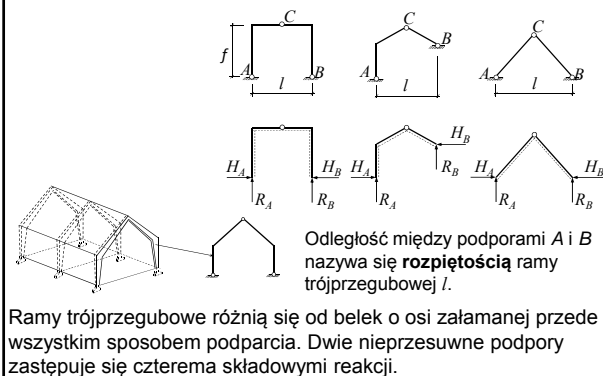
$$\sum M_D = 0 \Rightarrow 24 - 8 - 16 = 0$$

$$\sum P_x = 0 \Rightarrow 8 - 8 = 0$$

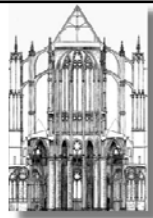
$$\sum P_y = 0 \Rightarrow 10 - 8 - 2 = 0$$

UKŁADY TRÓJPRZEGUBOWE (trójprzegubowe systemy ramowe) należą do najbardziej lubianych przez architektów szkieletowych systemów konstrukcyjnych. Charakteryzują się one wyjątkowo efektywnym rozkładem sił, co daje duże oszczędności materiału.

Układy prętowe nazywane są trójprzegubowymi, jeżeli obydwie podpory są wykonane jako przegubowe-nieprzesuwne oraz jeden z węzłów zaprojektowano jako połączenie przegubowe.



Cechą charakterystyczną układów trójprzegubowych jest występowanie na podporach składowych poziomych reakcji nazwanych **rozporem**. Reakcje poziome występują także w przypadku, gdy układów obciążonych wyłącznie siłami pionowymi.



W układach trójprzegubowych należy zastosować niestandardowe sposoby wyznaczania reakcji. Do dyspozycji są trzy równania równowagi oraz dodatkowy warunek zerowania się momentu zginającego w przegubie $M_C=0$.

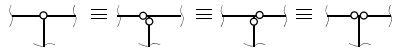
Równanie sumy momentów można zapisać, analizując lewą lub prawą stronę układu. Cztery niezależne równania równowagi umożliwiają obliczenie czterech składowych reakcji. Wyznaczenie sił wewnętrznych w przekrojach ram trójprzegubowych przeprowadza się identycznie jak dla belek załamanych.

Każdy przegub musi zostać wykorzystany co najmniej jeden raz. Jeżeli zapisuje się równania dla obu stron przegubu, to jedno z tych równań zastępuje główne równanie równowagi (zwykle sumę momentów względem dowolnego punktu).

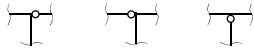
W układach trójprzegubowych są **cztery reakcje**. Wykorzystujemy **trzy równania równowagi** (dostępne dla płaskiego układu sił) oraz dodatkowy warunek zerowania się momentu zginającego w przegubie ($M_C = 0$). Równanie **sumy momentów** można zapisać, analizując **lewą lub prawą stronę** układu.

Wyznaczenie sił wewnętrznych w przekrojach ram trójprzegubowych przeprowadza się identycznie jak dla belek załamanych.

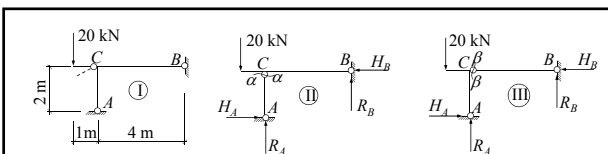
W układach ramowych, w których pręty w węzłach łączone są za pomocą przegubów, istotny jest sposób konstrukcji węzłów.



Węzeł łączący przegubowo **trzy** pręty



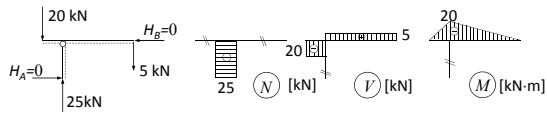
Węzeł łączący przegubowo **dwa** pręty



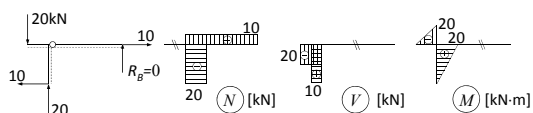
Położenie I

Pręt z lewej strony węzła C może się swobodnie obrócić, a więc układ jest geometrycznie zmienny. Wyznaczenie reakcji i sił wewnętrznych dla takiego układu nie jest możliwe.

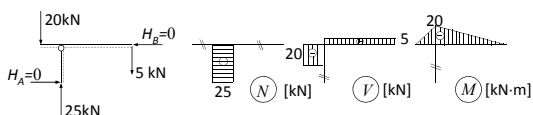
Położenie II $\sum M_C^D = 2H_A = 0 \Rightarrow H_A = 0$



Położenie III $\sum M_C^D = 4R_B = 0 \Rightarrow R_B = 0$



Porównanie wykresów



W obydwu przypadkach, różniących się jedynie położeniem przegubu w węzle, inne są reakcje i wykresy sił wewnętrznych. Analiza rozwiązania pozwala stwierdzić, że umieszczając odpowiednio przegub C można modelować rozkład sił wewnętrznych w układzie.

ŁUKI

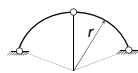
Dobrze zaprojektowany i wykonany łuk może być nie tylko konstrukcją o wyróżniających się walorach estetycznych, ale także układem bardziej bezpiecznym i ekonomicznym. W łukach, dzięki możliwości wyboru ich kształtu, można w znacznym stopniu zmniejszyć wielkości momentów zginających i sił poprzecznych, co pozwala na lepsze wykorzystanie materiału.



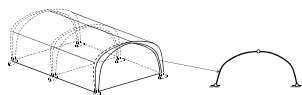
Belka o osi zakrzywionej



Łuk trójprzegubowy paraboliczny

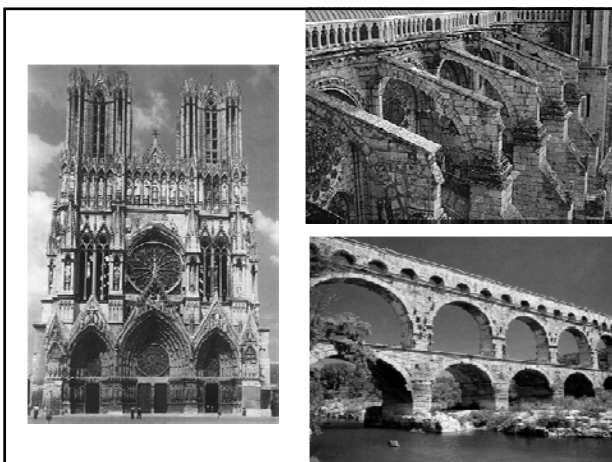


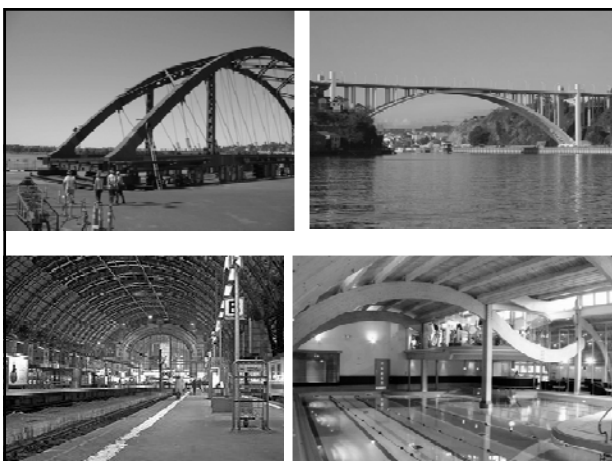
Łuk trójprzegubowy kołowy



Konstrukcja magazynu i jego schemat statyczny

Współcześnie łuki są stosowane przede wszystkim w konstrukcjach o dużych rozpiętościach.

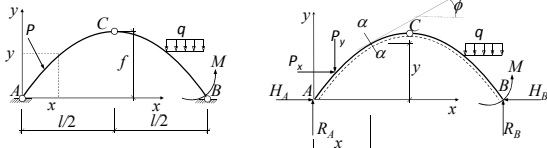




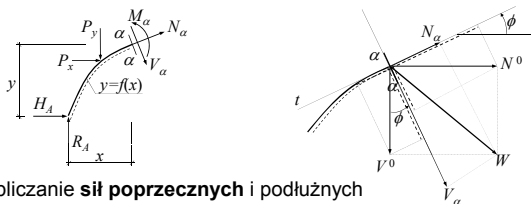
Odległość między podporami l , podobnie jak w belkach lub ramach, nazywa się **rozpiętością łuku**, najwyższy punkt – **kluczem łuku**, a jego wysokość mierzona od poziomu podpór – **strzałką łuku** f .

Kształt łuku można zaprojektować według równań dowolnych krzywych, np. jako parabole lub wycinki okręgów. Najczęściej stosowane są łuki, których osie opisane są **parabolami**.

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$$



Momenty zginające oblicza się tak jak dla układów ramowych. Na wartość M_α nie wpływa krzywizna układu, a jedynie położenie obciążenia względem przekroju $\alpha-\alpha$.

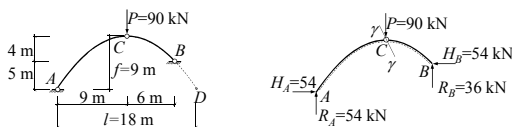


Obliczanie **sił poprzecznych** i podłużnych

$$N_\alpha = N^0 \cos \phi - V^0 \sin \phi$$

$$V_\alpha = V^0 \cos \phi + N^0 \sin \phi$$

Kąt nachylenia stycznej w dowolnym punkcie łuku $\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg} \phi = \frac{4f}{l^2} (l-2x) \Rightarrow \begin{cases} \sin \phi \\ \cos \phi \end{cases}$



$$\begin{cases} \sum M_B = 15R_A - 5H_A - 6 \cdot 90 = 0 \\ \sum M_C^L = 9R_A - 9H_A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_A = 54 \text{ kN} \\ H_A = 54 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum M_A = 15R_B + 5H_B - 9 \cdot 90 = 0 \\ \sum M_C^P = 6R_B - 4H_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R_B = 36 \text{ kN} \\ H_B = 54 \text{ kN} \end{cases}$$

$$\sum P_x = H_A - H_B = 54 - 54 = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H$$

$$\sum P_y = R_A + R_B - P = 54 + 36 - 90 = 0$$

$y = \frac{4.9}{18^2} \cdot (18-x) = \frac{1}{9}x(18-x)$ $\operatorname{tg} \phi = \frac{dy}{dx} = 2 - \frac{2}{9}x$

$\sum P_x = 0 \Rightarrow N^0 = -H = -54 \text{ kN}$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow V^0 = R_A = 54 \text{ kN}$
 $N_\alpha = -54 \cos \phi - 54 \sin \phi$
 $V_\alpha = 54 \cos \phi - 54 \sin \phi$
 $M_\alpha = R_A x - Hy = 54x - 54y$

$N^0 = -H = -54 \text{ kN}$
 $V^0 = R_A - P = 54 - 90 = -36 \text{ kN}$
 $N_\beta = -54 \cos \phi - 36 \sin \phi$
 $V_\beta = -36 \cos \phi - 54 \sin \phi$
 $M_\beta = 54x - 54y - 90 \cdot (x-9) = -36x - 54y + 810$

x [m]	y [m]	tg φ	sin φ	cos φ	N [kN]	V [kN]	M [kN·m]
0	0	2,000	0,894	0,447	-72,4	-24,1	0
3,0	5,0	1,333	0,800	0,600	-75,6	-10,8	-108
6,0	8,0	0,667	0,555	0,832	-74,9	15,0	-108
9,0	9,0	0,000	0,000	1,000	-54,0	54,0	0
12,0	8,0	-0,667	-0,555	0,832	-64,9	0,0	-54
15,0	5,0	-1,333	-0,800	0,600	-61,2	21,6	0

$\sum M_B = R_A l - ql \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_A = \frac{ql}{2}$
 $\sum M_A = R_B l - ql \frac{l}{2} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{ql}{2}$
 $\sum P_x = H_A - H_B = 0 \Rightarrow H_A = H_B = H$
 $\sum M_C = R_A \frac{l}{2} - Hf - \left(q \frac{l}{2} \right) \frac{l}{4} = 0 \Rightarrow H = \frac{1}{f} \frac{ql^2}{8}$

$R_A = \frac{ql}{2}$
 $H = \frac{ql^2}{8f}$
 $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$

$M_\alpha(x) = R_A x - \frac{1}{2} qx^2 - Hy = \frac{ql}{2} x - \frac{1}{2} qx^2 - \frac{ql^2}{8f} \frac{4f}{l^2} x(l-x) = 0$

Moment zginający jest równy zero w każdym punkcie łuku.

Siła poprzeczna jest pochodną momentów zginających, a więc też w każdym punkcie łuku jest równa zero $V_\alpha(x)=0$.

$N^0 = -H = -\frac{ql^2}{8f}, \quad V^0 = R_A - qx = \frac{1}{2} ql - qx$
 $N_\alpha = -\frac{ql^2}{8f} \cos \phi - \left(\frac{1}{2} ql - qx\right) \sin \phi$

Konstrukcja, w której występują jedynie ściskające siły podłużne, jest w pewnym sensie konstrukcją idealną. W takim przypadku każdy punkt przekroju poprzecznego pręta jest jedynie ściskany, co pozwala na bardziej ekonomiczne wykorzystanie materiału. Tę cechę wykorzystywano już w starożytności, wykonując łuki z kłińców kamiennych.

Rzeczywiste konstrukcje obciążone są jednak w bardziej skomplikowany sposób niż obciążenie równomierne (np. obciążenie wiatrem). Te dodatkowe obciążenia powodują, że w łuku zawsze wystąpią momenty zginające i siły poprzeczne. Jednakże optymalna konstrukcja kształtu łuku prowadzi do zerowania się momentu zginającego od obciążenia ciężarem własnym, które zazwyczaj dominuje.

LINIA CIŚNIENIA

O konstrukcji, w której obciążenie zewnętrzne jest równoważone tylko przez siły podłużne mówi się, że jest zaprojektowana według linii ciśnienia. Linia ciśnienia dla obciążenia równomiernego jest parabola.

Projektując układ konstrukcyjny według linii ciśnienia zakłada się, że znane jest obciążenie zewnętrzne $q(x)$ i należy wyznaczyć równanie osi układu w taki sposób, aby występowały w nim tylko siły normalne.

$[M] = R_A x_\alpha - qx_\alpha \frac{x_\alpha}{2}$
 $M = R_A x_\alpha - qx_\alpha \frac{x_\alpha}{2} - Hy_\alpha = [M] - H \cdot y_\alpha$
 $M_C = [M_C] - H \cdot f = 0$
 $H = \frac{[M_C]}{f} = \frac{ql^2}{8f}$

Rozpór jest tym większy im mniejsza jest strzałka łuku f.

Moment zginający dla linii ciśnien musi być w każdym punkcie układu równy zero:

$$M(x) = [M(x)] - H \cdot y = 0$$

Równanie linii ciśnienia $y = [M(x)]/H$

Dla znalezienia linii ciśnienia dla danego obciążenia, potrzebna jest znajomość momentu zginającego $[M(x)]$ wyznaczonego dla odpowiedniej belki swobodnie podpartej.

Aby rozwiązanie było jednoznaczne należy znać położenie jeszcze jednego punktu układu (oprócz danego położenia podpór).

Przyjmując przykładowo, że wysokość łuku w środku rozpiętości wynosi f , otrzymuje się następujący dodatkowy warunek:

$$y(l/2) = f \quad H = [M(l/2)]/f$$

$[M(l/2)] = ql^2/16$

$$H = [M(l/2)]/f = \frac{1}{16} \frac{ql^2}{f}$$

$$y(x) = \frac{[M(x)]}{H} = \frac{8f}{3l}x - \frac{8f}{3l^3}x^3$$

$$[M(x)] = \frac{1}{6}qlx - \frac{1}{6l}qx^3$$

$[M(l/2)] = \frac{Pl}{4}$

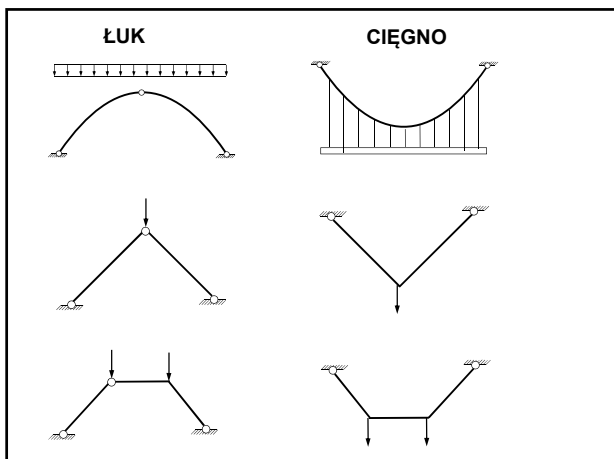
$$H = [M(l/2)]/f = \frac{Pl}{4f}$$

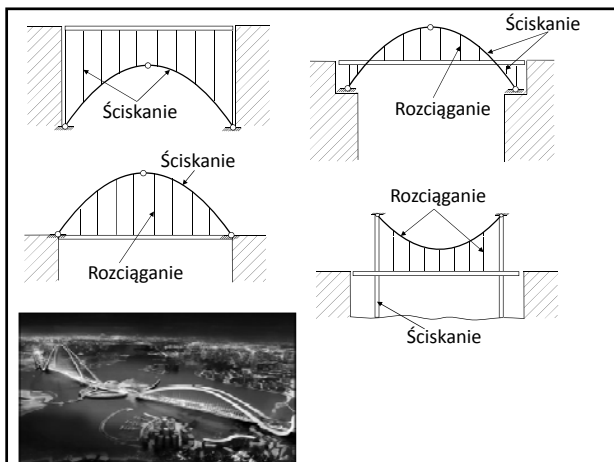
A-C $y(x) = \frac{[M(x)]}{H} = \frac{\frac{P}{2}x}{\frac{Pl}{4f}} = \frac{2f}{l}x$

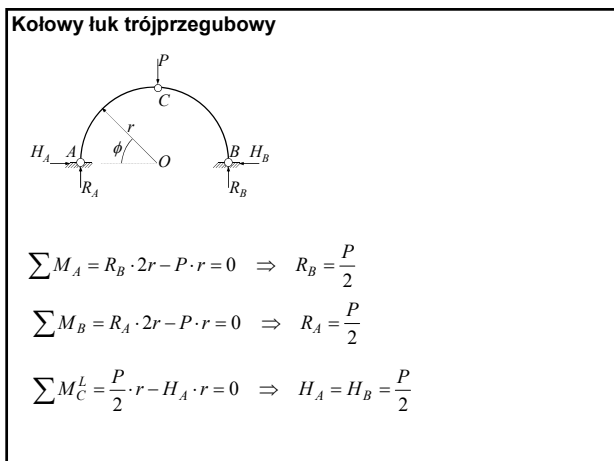
C-B $y(x) = \frac{2f}{l}(l-x)$

A-C $[M(x)] = \frac{P}{2}x$

C-B $[M(x)] = \frac{P}{2}(l-x)$







W przypadku łuków kołowych wyrażenia określające siły wewnętrzne wygodniej jest zapisać w funkcji kąta ϕ .

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

$$M_\alpha(\phi) = R_A \cdot x - H_A \cdot y = \frac{P}{2} \cdot (r - r \cdot \cos \phi) - \frac{P}{2} \cdot r \cdot \sin \phi = \frac{P \cdot r}{2} (1 - \cos \phi - \sin \phi)$$

$$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$$

$$M_\alpha(\phi) = R_A \cdot x - H_A \cdot y - P \cdot (x - r) = \frac{P \cdot r}{2} (1 - \cos \phi - \sin \phi) + P \cdot r \cdot \cos \phi$$

Wzory na siły poprzeczną i podłużną dla łuku kołowego różnią się od analogicznych wyrażen dla łuku parabolicznego z uwagi na inną definicję kąta ϕ .

$$N_\alpha = N^0 \sin \phi - V^0 \cos \phi \quad V_\alpha = N^0 \cos \phi + V^0 \sin \phi$$

$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$

$$N^0 = -\frac{P}{2}, \quad V^0 = \frac{P}{2}$$

$$N_\alpha(\phi) = -\frac{P}{2}(\sin \phi + \cos \phi)$$

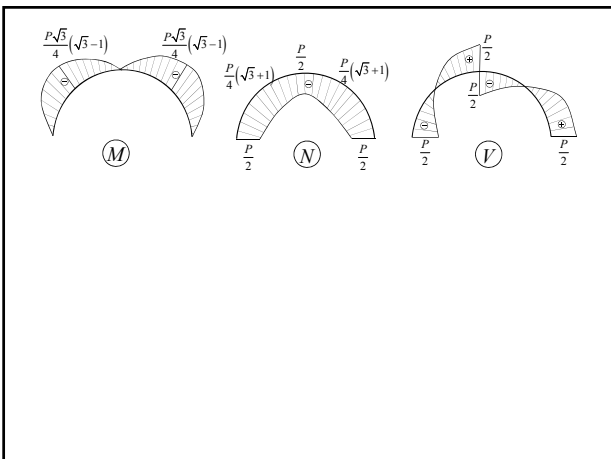
$$V_\alpha(\phi) = \frac{P}{2}(\sin \phi - \cos \phi)$$

$\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \pi$

$$N^0 = -\frac{P}{2}, \quad V^0 = -\frac{P}{2}$$

$$N_\alpha(\phi) = \frac{P}{2}(-\sin \phi + \cos \phi)$$

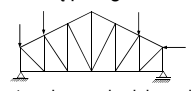
$$V_\alpha(\phi) = -\frac{P}{2}(\sin \phi + \cos \phi)$$



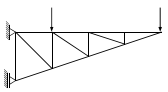
KRATOWNICE

Kratownicą nazywa się geometrycznie niezmienny układ prostoliniowych prętów połączonych ze sobą w węzłach za pomocą przegubów.

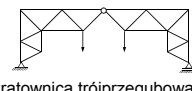
Dla uproszczenia rysunków, węzłów kratownic nie oznaczamy kółkami.



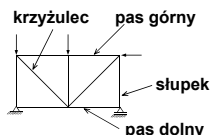
kratownica swobodnie podparta

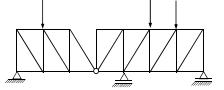


Kratownica wspornikowa



kratownica trójprzegubowa



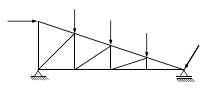
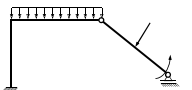


kratownica ciągła-przegubowa

Kratownica jest szczególnym przypadkiem ramy o podatnych węzłach.

Różnice pomiędzy ramą i kratą

<p>Kratownica</p> <ul style="list-style-type: none"> - połączenia przegubowe, - obciążenie w formie sił skupionych przyłożone do węzłów (nie można do węzłów przyłożyć momentów skupionych), - podpory blokujące przesuw, - w prętach występuje tylko siła podłużna. 	<p>Rama</p> <ul style="list-style-type: none"> - dowolny rodzaj połączeń: przegubowe i sztywne, - dowolne obciążenie przyłożone do węzłów lub do elementów, - podpory blokujące przesuw i obroty, - w prętach występuje siła podłużna, poprzeczna i moment zginający.
---	--

Pręty kratownicy są rozciągane lub ściskane, co pozwala na większą nośność konstrukcji niż przy innych rozwiązaniach, przy takim samym zużyciu materiału. **Kratownice wykorzystywane są w konstrukcjach o znacznych rozpiętościach.**

Kratownice trójkątne i trapezowe znajdują zastosowanie głównie jako więzary dachowe.

Kratownice o pasach równoległych są najczęściej używane w budownictwie przemysłowym.

Kratownice o pasach parabolicznych używane są głównie jako konstrukcje mostów - najbardziej ekonomiczne.

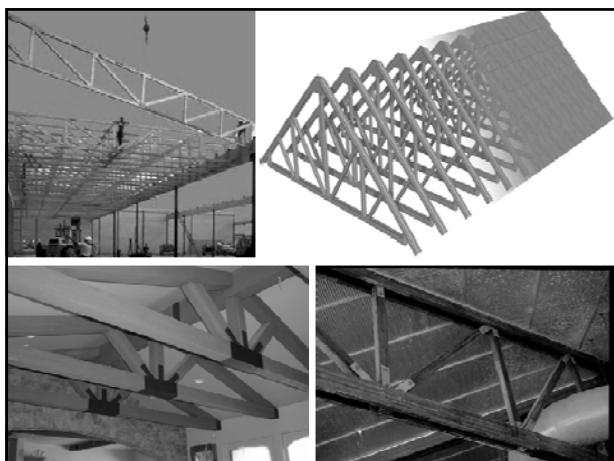


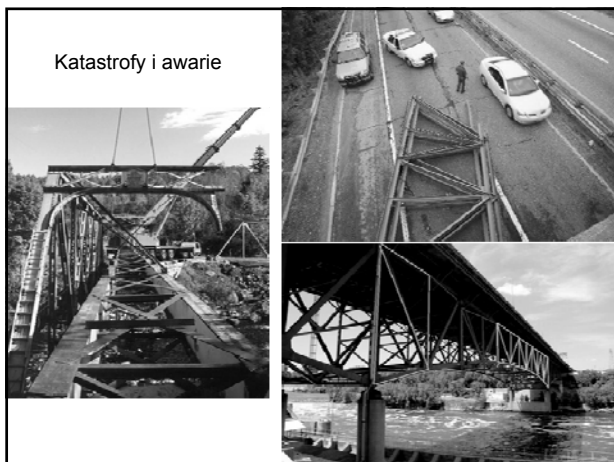








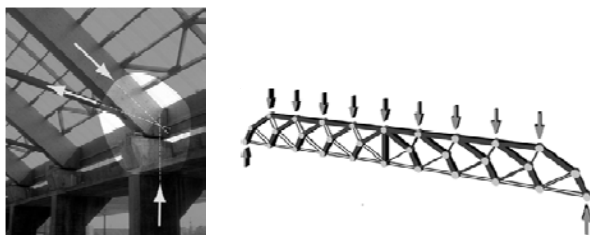






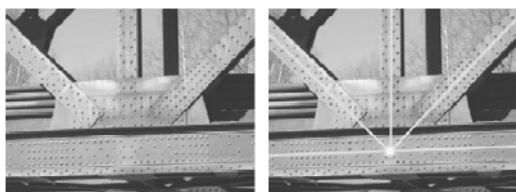
ZAŁOŻENIA:

- Osie schodzących się w węzłach kratownicy prętów przecinają się w jednym punkcie – środku przegubu.



- Obciążenie zewnętrzne działające na kratownice przykładowe jest wyłącznie w węzłach, w postaci sił skupionych.
- Ciężar własny konstrukcji, zazwyczaj niewielki w porównaniu z obciążeniem użytkowym, zastępuje się siłami skupionymi. przyłożonymi także w węzłach.

Przeguby kratownicy nie są idealnymi przegubami pozbawionymi tarcia. Od przegubów wymaga się, aby osie prętów kratownicy przechodziły przez jeden punkt wyznaczający miejsce przegubu. W rzeczywistości jest inaczej (np. połączenia na gwoździe, nity).



O połączeniu przegubowym można też mówić w sytuacji gdy połączenie elementu z węzłem (np.. Z blachą węzłową) ma znacznie mniejszą sztywność na zginanie niż pręt.

Sztywność połączeń węzłowych powoduje powstanie w prętach dodatkowych sił. Są one jednak drugorzędne i powodują powstanie niewielkich różnic w porównaniu z siłami obliczonymi przy założeniu idealnych przegubów.



Przegub kratownicy drewnianej

W rzeczywistości nie spełnione są warunki obciążenia w formie sił skupionych bo np. ciężar własny prętów nie jest siłą skupioną tylko obciążeniem ciągłym. Jednak, w większości przypadków ciężar własny prętów kratownicy sprowadza się do jednej siły, której kierunek przechodzi przez przegub.



ANALIZA STATYCZNA

Równowaga pręta kratownicy

$\Sigma P_x = 0, \Sigma P_y = 0, \Sigma M_A = 0$

Momenty zginające w przegubach A i B pręta z definicji są równe zero. Gdyby w przegubach działały siły poprzeczne, to pręt nie byłby w równowadze. Mogą więc tam wystąpić jedynie siły równoległe do osi pręta, powodujące wystąpienie **sił podłużnych**.
Siły rozciągające w prętach określa się jako dodatnie. W węźle, w wyniku oddziaływania pręta, powstanie siła o tej samej wartości, lecz przeciwnie skierowana.

Równowaga węzła kratownicy

W każdym węźle kratownicy występuje zbieżny układ sił, który musi spełniać warunki równowagi: $\Sigma P_x = 0, \Sigma P_y = 0$.

w – liczba węzłów kratownicy Liczba równań: $2w$
 r – składowe reakcji podpór Niewiadome: $r + p$
 p – liczba prętów kratownicy

Kratownica jest **statycznie wyznaczalna**, jeżeli spełniony jest następujący warunek:

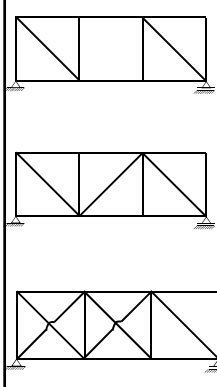
$r + p - 2w = 0$

Kratownica trójkątna jest układem geometrycznie niezmiennym 2 pręty + węzeł

Kratownica geometrycznie niezmienna (wewnętrznie)

Kratownica geometrycznie zmienna – układ chwiejny

Rama

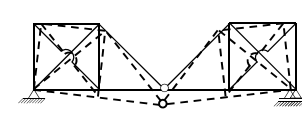


Kratownica **geometrycznie zmienna** – układ, który nie może znaleźć się w stanie równowagi statycznej

Kratownica **statycznie wyznaczalna** – wyznaczenie reakcji i sił wewnętrznych możliwe za pomocą równań równowagi

Kratownica **statycznie niewyznaczalna** – wyznaczenie reakcji i sił wewnętrznych nie jest możliwe za pomocą równań równowagi

Analiza kinematyczna polega na sprawdzeniu, czy sposób połączenia prętów kratownicy zapewnia jej geometryczną niezmienniczość.



$r=3, p=16, w=9 \Rightarrow s=3+16-2\cdot 9=1$

Kratownica **geometrycznie zmienna - mechanizm**


Analiza statyczna polega na wyznaczeniu sił normalnych występujących w prętach. W trakcie obliczania sił normalnych w prętach kratownicy oraz reakcji podporowych stosuje się **założenie o małych odkształceniach** (zasadę zeszywnienia). Ugięcia kratownicy są bardzo małe w porównaniu z jej długością (rzędu paru procent) i można pominąć ich wpływ na reakcje oraz siły normalne.

Metody wyznaczania sił w prętach kratownicy

Metoda wykreślna Cremony, metody analityczne: równoważenia węzłów i metoda przekrojów (Rittera).

W pierwszym etapie analizy z reguły wyznacza się składowe reakcje podporowych z odpowiednich równań równowagi zapisanych do całej kratownicy (podobnie jak dla belek lub ram).

- Przyjmuje się, że nieznanne siły są rozciągające tzn. na rysunkach oznacza się jako wychodzące z węzłów. **Są to siły dodatnie.**
- Jeżeli siła obliczona posiada znak " - " oznacza to, że pręt podlega ścisnaniu.



Rozciąganie

Ściskanie

Metoda kolejnego równoważenia węzłów . Obliczenia rozpoczyna się od węzła, w którym występują co najwyżej dwie nieznanne siły i przechodzi do kolejnego z dwiema niewiadomymi.

$\sum P_x = 0 \Rightarrow G_1 = 0$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow S_1 = 0$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow K_1$
 $\sum P_x = 0 \Rightarrow D_1$

$\sum P_x = 0 \Rightarrow 2 \text{ kontrola}$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow 3 \text{ kontrola}$

$\sum P_x = 0 \Rightarrow G_2$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow 1 \text{ kontrola}$

$\sum P_y = 0 \Rightarrow S_2$
 $\sum P_x = 0 \Rightarrow D_2$

$\sum P_x = 0 \Rightarrow K_2$
 $\sum P_y = 0 \Rightarrow S_3$

Metoda równoważenia węzłów jest prosta w zastosowaniu, jednak z uwagi na „przechodzenie” w obliczeniach od węzła do węzła, popelnienie błędu rachunkowego na początku obliczeń, prowadzi do błędnego rozwiązania całości.

Metoda przekrojów (Rittera) umożliwia niezależne wyznaczenie sił w dowolnych prętach kratownicy. Stosuje się ją wyłącznie dla przekrojów kratownic zawierających co najwyżej trzy pręty, których kierunki nie przecinają się w jednym punkcie.

$\sum M_E = 0, \sum M_H = 0, \sum P_y = 0$

W przypadku kratownic nie ma potrzeby wykonywania wykresów sił wewnętrznych, gdyż siły (podłużne) w każdym pręcie mają przebieg równomierny. W podsumowaniu można wykonać spis (listę) uzyskanych wyników lub umieścić wartości sił, jak na rysunku.

Znak „minus” oznacza ściskanie pręta.

Jeżeli nieobciążony węzeł łączy dwa pręty o dowolnych kierunkach, to nie wystąpią w nich siły $S_1 = S_2 = 0$.

Jeżeli w węźle nieobciążonym zbiegają się trzy pręty, z których dwa leżą na jednej prostej, to siła w trzecim dochodzącym do nich pręcie jest równa zero ($S_3 = 0$). Ponadto w prętach leżących na jednej prostej siły będą jednakowe ($S_1 = S_2$). Reguła ta dotyczy także węzła obciążonego, w którym zbiegają się dwa pręty i jeden z nich leży wzdłuż linii działania siły.

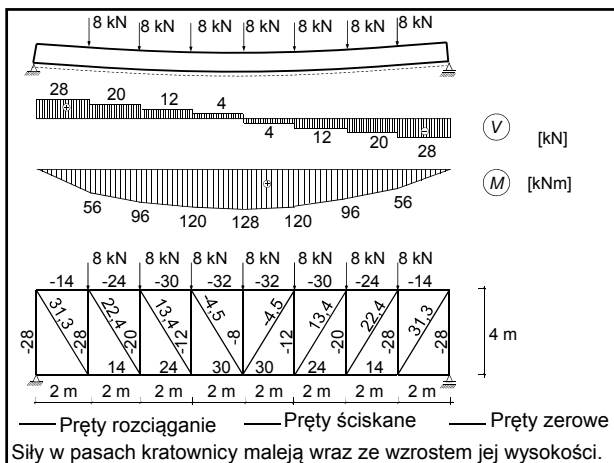
Jeżeli węzeł nieobciążony łączy cztery pręty leżące parami na dwóch prostych, to wartości sił w każdej parze są sobie równe ($S_1 = S_3, S_2 = S_4$). Reguła ta dotyczy także węzła obciążonego, w którym jedną lub obie pary tworzą pręt i siła leżące na jednej prostej.

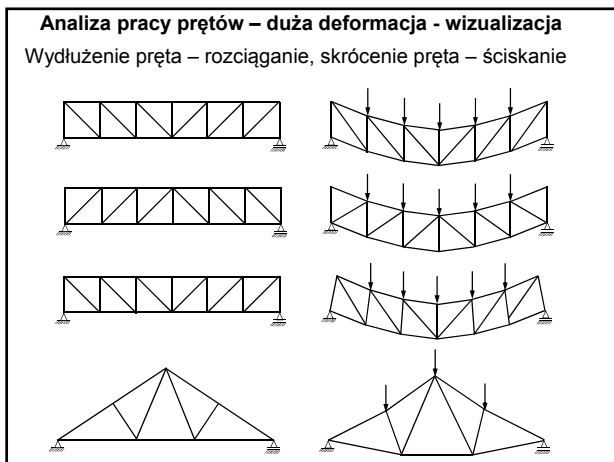
Pręty o zerowych wartościach siły nie są niezbędne. Usunięcie zerowego pręta EF z kratownicy i zastąpienie dwóch prętów CE i EG jednym prętem CG , nie zmieniłoby niczego w rozkładzie sił wewnętrznych kratownicy. Taka zmiana jednak zwiększy podatność pręta CG na wyboczenie.

Pręty zerowe mogą być także potrzebne dla zapewnienia stateczności kratownicy w czasie jej konstrukcji lub z uwagi na obciążenia użytkowe.

Analiza pracy prętów kratownicy

— Pręty rozciąganie
— Pręty ściskane



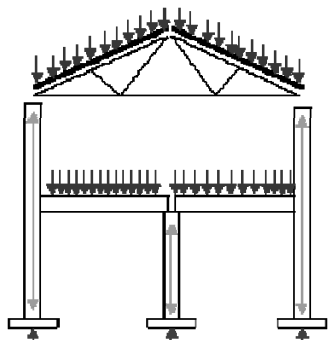


Dodatkowe uwagi

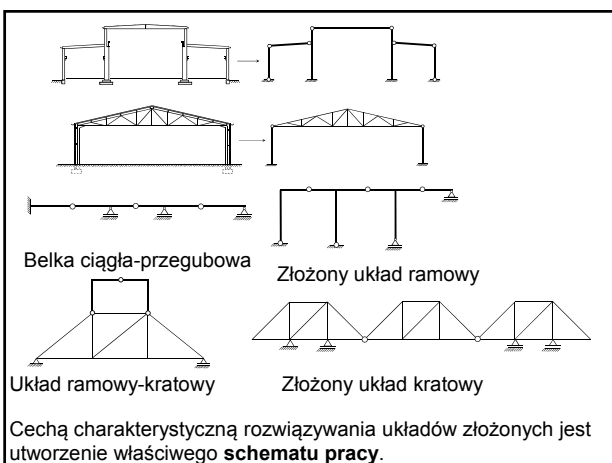
- Kratownice pozwalają na wykonanie konstrukcji o znacznych rozpiętościach ponieważ materiał, z którego są wykonane jest lepiej wykorzystany niż np. w belkach.
- Przy kształtowaniu kratownic, najmniejsze siły w prętach ukośnych występują przy ich nachyleniu do poziomu 45° - 60° .
- Pręty ściskane powinny być możliwie najkrótsze.
- Wykonanie konstrukcji kratowej jest trudniejsze niż belek czy układów ramowych.
- W praktycznych obliczeniach, siły w niektórych prętach najczęściej wyznacza się metodą równoważenia węzłów a w innych metodą przekrojów. W wielu przypadkach oblicza się jedynie siły w wybranych prętach, w których spodziewamy się wystąpienia wartości ekstremalnych.
- Przedstawione metody rozwiązywania kratownic mogą być też użyteczne przy projektowaniu kratownic przestrzennych, dla których siły w prętach można wyznaczyć metodą podziału na kratownice płaskie.

UKŁADY ZŁOŻONE

Elementy prętowe (belki, ramy, kratownice, itp.) często wchodzi w skład bardziej skomplikowanych konstrukcji inżynierskich, tworząc tzw. **układy złożone**.







Dla prawidłowo zaprojektowanego układu złożonego można utworzyć wyłącznie jeden schemat pracy.

Na podstawie schematu pracy można określić, które z układów składowych stanowią podstawę konstrukcji, a które, i w jakiej kolejności, na niej się opierają. Dalsze obliczenia, wykonywane dla poszczególnych schematów podstawowych będą miały standardowy przebieg.

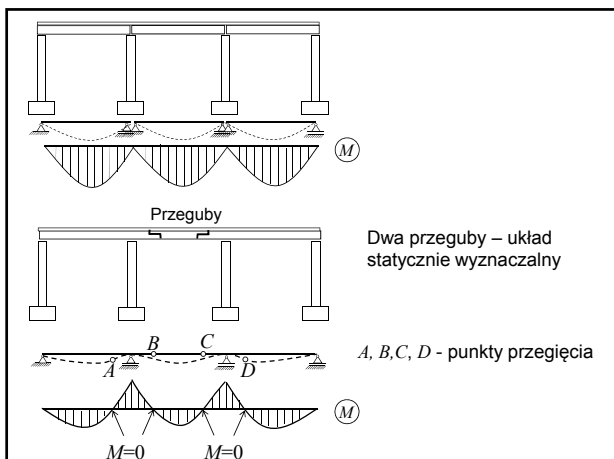
Za wyjątkiem belek ciągłych przegubowych nie można podać żadnych ścisłych reguł pozwalających na automatyczne tworzenie schematów pracy. Najprostszą definicją byłoby „spojrzenie” na układ złożony okiem kogoś, kto ma wykonać jego konstrukcję. Jest oczywiste, że nie można rozpocząć budowania mostu od przęsła środkowego lub konstrukcji ramowo-kratowej od elementu ramowego.

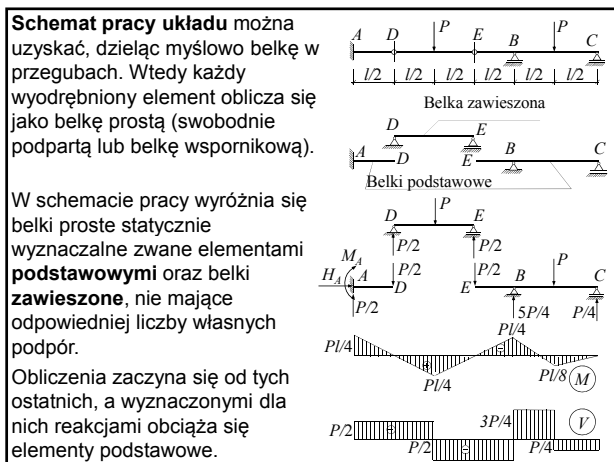
BELKI CIĄGŁE PRZEGUBOWE

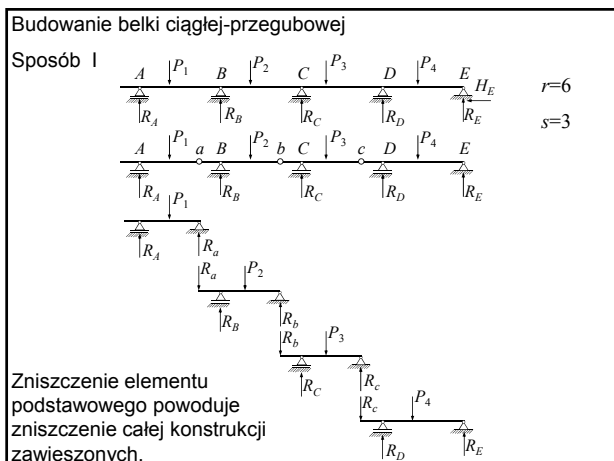
Geometrycznie niezmienny układ utworzony z szeregu jednoprzęsłowych belek prostych, połączonych ze sobą przegubami, nazywa się **belką ciągłą przegubową** lub **belką gerberowską**.

Zazwyczaj przyjmuje się, że na belkę działa wyłącznie **obciążenie pionowe**.

Belki tego typu pozwalają na uzyskanie dużych rozpiętości przęseł i są stosowane między innymi w konstrukcjach mostowych.







Sposób II

$r=7$
 $s=4$

Zniszczenie elementu podstawowego powoduje zniszczenie co najwyżej dwu przyległych belek zawieszonych.

Rozmieszczenie przegubów

Mechanizm

Układ statycznie wyznaczalny

Połączenia przegubowo-przesuwne

Połączenie przegubowo-nieprzesuwne

Podpora przegubowo-przesuwna

MECHANIZM

Podpora przegubowo-nieprzesuwna

Podpora przegubowo-nieprzesuwna

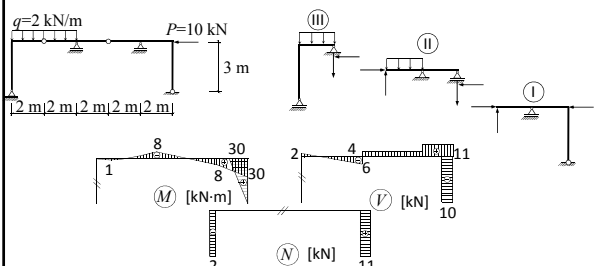
Stosując połączenie przegubowo-przesuwne, przy obciążeniach poziomych, otrzymuje się mniejsze reakcje poziome oraz mniejsze wydłużenie (skrócenie) na skutek zmian temperatury.

Przy obciążeniach pionowych nie ma różnicy.

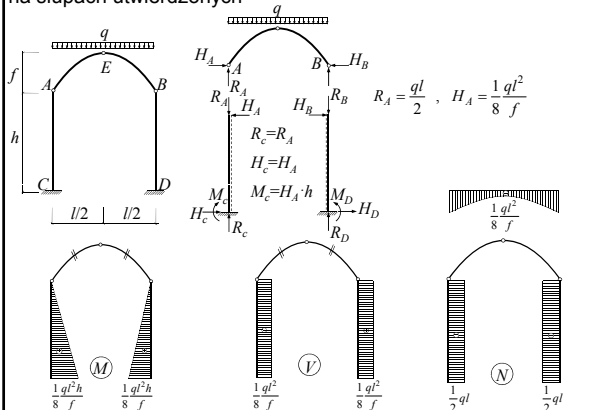
ZŁOŻONE UKŁADY RAMOWE I KRATOWE

Elementami składowymi złożonych układów ramowych są odpowiednio połączone ze sobą belki proste, belki złożone, ramy oraz układy trójprzegubowe, a także łuki. W skład złożonych układów kratowych wchodzi jedynie kratownice. Są one bardzo często stosowane w budownictwie mostowym.

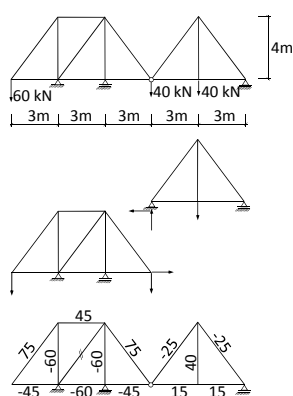
Układ ramowy-belkowy



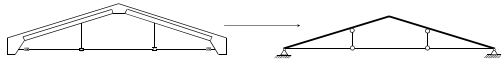
Układ złożony z parabolicznego łuku trójprzegubowego opartego na słupach utwierdzonych



Złożony układ kratowy

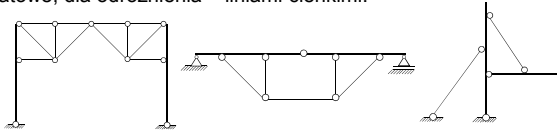


UKŁADY RAMOWO-KRATOWE (MIESZANE)



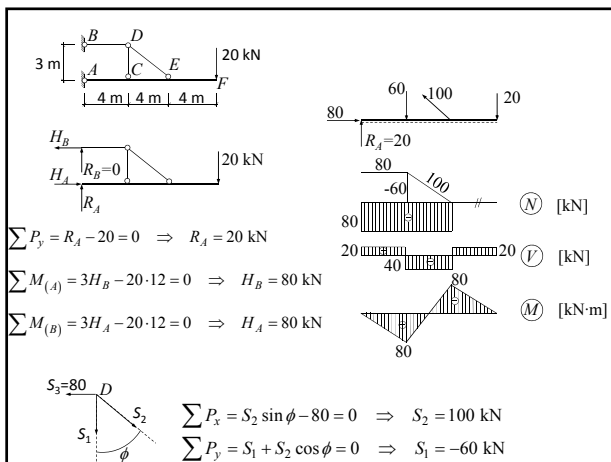
Konstrukcja i schemat statyczny dźwigara żelbetowego ze ściągiem

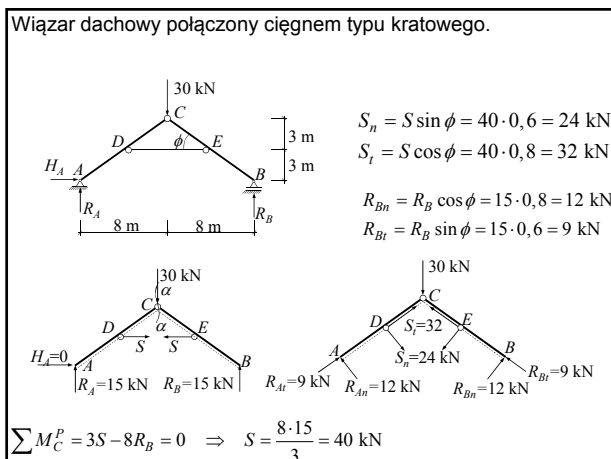
Pręty ramowe będą oznaczane na rysunkach grubymi liniami, a kratowe, dla odróżnienia – liniami cienkimi.

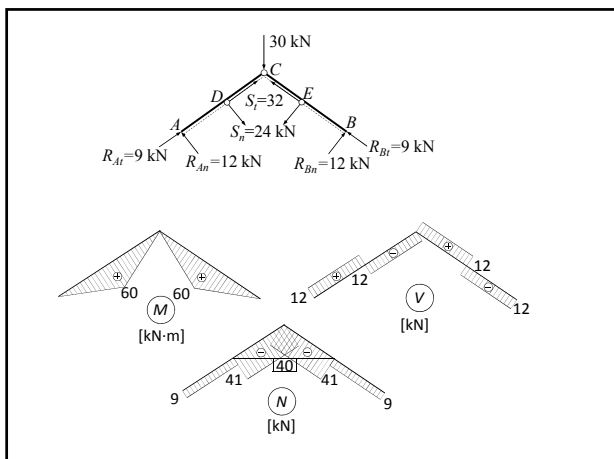


Nie jest możliwe sformułowanie standardowego algorytmu rozwiązania dla wszystkich typów układów mieszanych. Każdy układ wymaga zastosowania specyficznego podejścia.

Najczęściej obliczenia rozpoczyna się od wyznaczenia sił w prętach typu kratowego, którymi następnie obciążane są pręty ramowe.



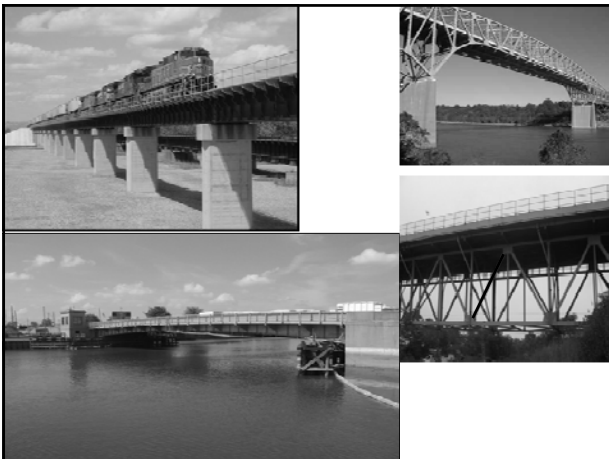


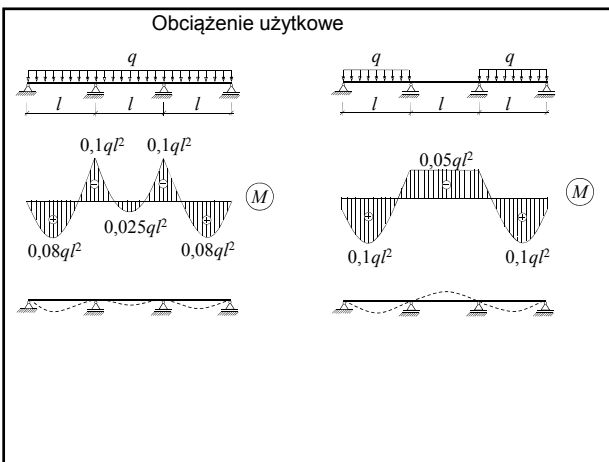


OBCIĄŻENIA ZMIENNE

Ważną grupą obciążeń budowlanych są **obciążenia zmienne ruchome**. Obciążenia tego typu, nazywane **użytkowymi**, mogą wywoływać np. koła pojazdów czy suwnic – siły skupione lub tłum ludzi przechodzący po kładce dla pieszych – obciążenie ciągłe.

Hala z belką podsuwnicową





Przy projektowaniu konstrukcji, po których obciążenie się porusza lub może znajdować się w dowolnym miejscu, należy wyznaczyć ekstremalne wartości reakcji i sił wewnętrznych.

Konstrukcjami tego typu są na przykład mosty oraz stropy w budynkach, które w zależności od charakteru pracy statycznej mogą być modelowane jako belki, ramy czy kratownice.

Ekstremalne wartości statyczne (siły wewnętrzne, ugięcia, itp.), jakie mogą wystąpić w układzie, oblicza się dla **najbardziej niekorzystnego położenia lub rozkładu obciążenia.**

Ich wyznaczenie jest zasadniczym celem obliczeń statycznych dla obciążeń zmiennych.

LINIE WPŁYWU

Linie wpływu są to funkcje lub wykresy obrazujące zależność pomiędzy poszukiwaną wielkością statyczną (np. reakcją, siłą wewnętrzną lub ugięciem układu), a położeniem jednostkowej siły skupionej $P = 1$.

Linie wpływu służą przede wszystkim do wyznaczenia ekstremalnych wartości dowolnych wielkości statycznych np. reakcji czy sił wewnętrznych w wybranych przekrojach układu. Ponadto wykorzystywane są do sporządzania obwiedni sił wewnętrznych.

W przypadku wyznaczania linii wpływu, linie przerywane nie oznaczają spodu, ale określają fragment układu, po którym przemieszcza się siła $P = 1$.

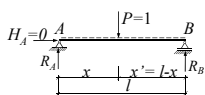
Funkcje opisujące linie wpływu reakcji i sił wewnętrznych wyznaczamy korzystając z tych samych zasad jakie stosuje się przy wyznaczaniu wartości reakcji i sił wewnętrznych od obciążeń statycznych, czyli w przypadku reakcji korzystamy z równań równowagi całej konstrukcji, a w przypadku sił wewnętrznych z warunku równowagi jednej ze stron przekroju.

W układach statycznie wyznaczalnych funkcje je opisujące są **funkcjami liniowymi** (tzn. zawierają zmienną x tylko w pierwszej potęgde).

Różnica pomiędzy obliczaniem reakcji czy sił wewnętrznych (w ustalonym przekroju) od obciążenia nieruchomego a wyznaczaniem linii wpływu tych wielkości polega na tym, że w pierwszym przypadku otrzymujemy konkretną wartość, a w drugim funkcję zmiennej, opisującej położenie siły jednostkowej.

W związku z tym pisząc równania linii wpływu reakcji należy tak je przekształcić, aby w jednym równaniu występowała tylko jedna „nieznana” reakcja (funkcja linii wpływu reakcji).

Linie wpływu reakcji podporowych, siły poprzecznej i momentu zginającego w przekroju $\alpha-\alpha$ w belce swobodnie podpartej.



$$\sum M_{(A)} = R_B l - Px = 0 \Rightarrow R_B(x) = \frac{x}{l} P$$

$$\sum M_{(B)} = R_A l - P(l-x) = 0 \Rightarrow R_A(x) = \frac{l-x}{l} P$$

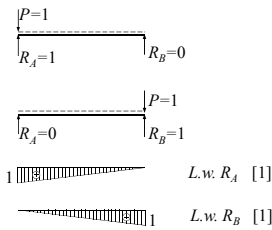
Dla $P = 1$ otrzymamy **równania linii wpływu reakcji:**

L.w. R_A [1]
 $L.w. R_A(x) = \frac{l-x}{l} = 1 - \frac{x}{l}$ [1]

L.w. R_B [1]
 $L.w. R_B(x) = \frac{x}{l}$ [1]

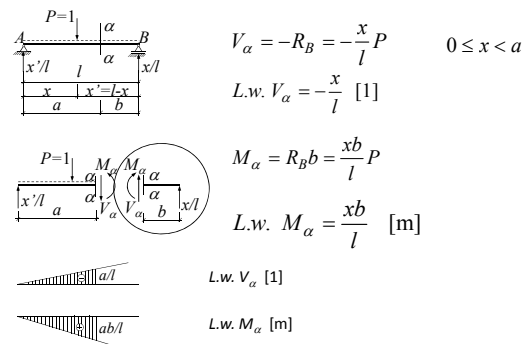
Linie wpływu opisujemy skrótem *L.w.* z dodaniem oznaczenia odpowiedniej wielkości statycznej.
Każda rzędna wykresu wskazuje wartość reakcji R_A lub R_B dla siły $P = 1$ położonej na belce nad tą rzędną.

Wzory na linii wpływu określają wartości reakcji R_A lub R_B w zależności od położenia siły jednostkowej $P = 1$. Wykresy tych funkcji są liniami prostymi, więc aby je narysować, wystarczy wyznaczyć dwie wielkości, np. w punktach skrajnych (podporowych).



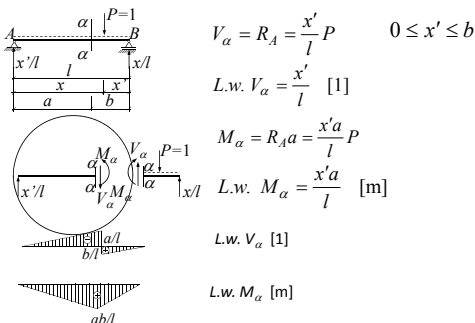
Nanosząc skrajne rzędne linii wpływu reakcji podporowych na rysunek i łącząc je liniami prostymi, otrzymujemy ich wykresy.

1. Siła $P = 1$ znajduje się na lewo od przekroju $\alpha-\alpha$.



Przyjmujemy konwencję, według której **dodatnie wartości linii wpływu rysujemy na dole**.

2. Siła $P = 1$ znajduje się na prawo od przekroju $\alpha-\alpha$.



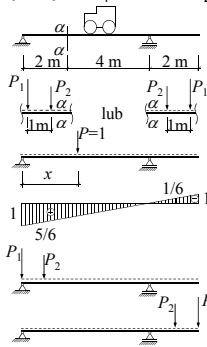
Linia wpływu momentu zginającego dla belki swobodnie podpartej: pod ustalonym przekrojem $\alpha-\alpha$ nanosi się charakterystyczną rzędną o wartości ab/l i łączy ją liniami prostymi z zerowymi rzędnymi na podporach.

EKSTREMALNE OBCIĄŻANIE LINII WPŁYWU

Linie wpływu i zasady ich obciążania, wykorzystywane są przede wszystkim do wyznaczania **ekstremalnych** wartości reakcji i sił wewnętrznych wywołanych obciążeniem, którego położenie nie jest zdefiniowane. Charakter tego obciążenia i jego parametry są wielkościami danymi. Nieznane położenie obciążenia wywołujące ekstremalne wartości sił wewnętrznych nazywane jest **niekorzystnym**.

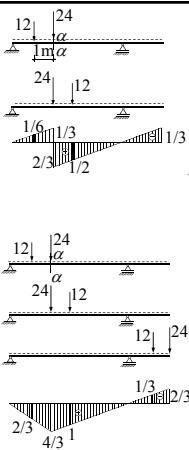
W przypadku, gdy linia wpływu analizowanej wielkości statycznej K zmienia znak, poszukuje się dwóch niekorzystnych położen obciążenia, wywołujących maksymalną i minimalną wartość K .

Ekstremalne wartości reakcji R_A oraz siły poprzecznej V_α i momentu zginającego M_α w przekroju $\alpha-\alpha$ belki swobodnie podpartej ze wspornikiem dla ruchomego układu dwóch sił sprzężonych $P_1=24$ kN i $P_2=12$ kN.



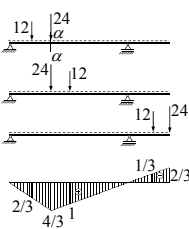
$$R_A^{\max} = 24 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{5}{6} = 34 \text{ kN}$$

$$R_A^{\min} = -24 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{1}{6} = -10 \text{ kN}$$



$$V_\alpha^{\max} = 24 \cdot \frac{2}{3} + 12 \cdot \frac{1}{2} = 22 \text{ kN}$$

$$V_\alpha^{\min} = -24 \cdot \frac{1}{3} - 12 \cdot \frac{1}{6} = -10 \text{ kN}$$



$$M_\alpha^{\max} = 24 \cdot \frac{4}{3} + 12 \cdot 1 = 44 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_\alpha^{\min} = -24 \cdot \frac{2}{3} - 12 \cdot \frac{1}{3} = -20 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Ekstremalne wartości reakcji R_A i momentu zginającego M_α kładki dla pieszych.

$$R_A^{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot 10 \cdot 2 = 12,5 \text{ kN}$$

$$R_A^{\min} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot 2 = -0,5 \text{ kN}$$

L.w. R_A [1]

$$M_\alpha^{\max} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 8 \cdot 2 = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_\alpha^{\min} = -\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2\right) \cdot 2 = -4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Powyższe przykłady ilustrują zastosowanie linii wpływu w przypadku obciążenia zmiennego.

Wykorzystując standardowe metody obliczania reakcji i sił wewnętrznych, nie można określić ich ekstremalnych wartości.

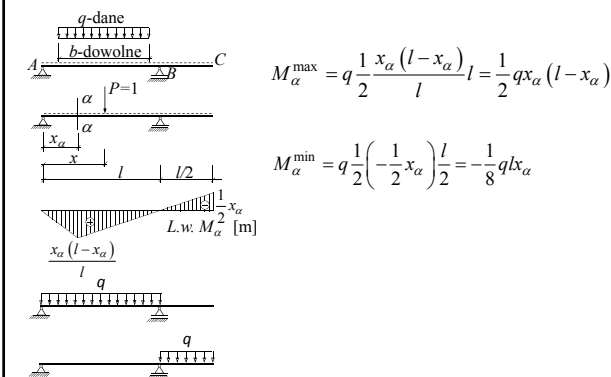
Wyniki uzyskane za pomocą linii wpływu dotyczą pojedynczych, wybranych przekrojów belki. Ekstremalne wartości sił wewnętrznych powinny być określone we wszystkich charakterystycznych punktach układu. Przedstawiony cykl obliczeń należy więc powtórzyć dla różnych położeń przekroju poprzecznego, np. nad wszystkimi podporami i w kilku wybranych punktach przęsła.

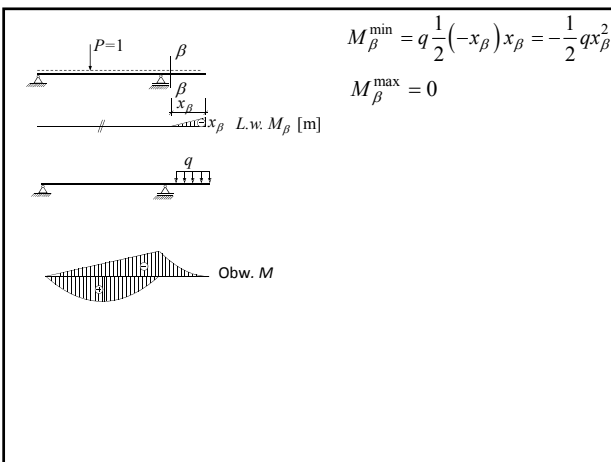
OBWIEDNIE SIŁ WEWNĘTRZNYCH

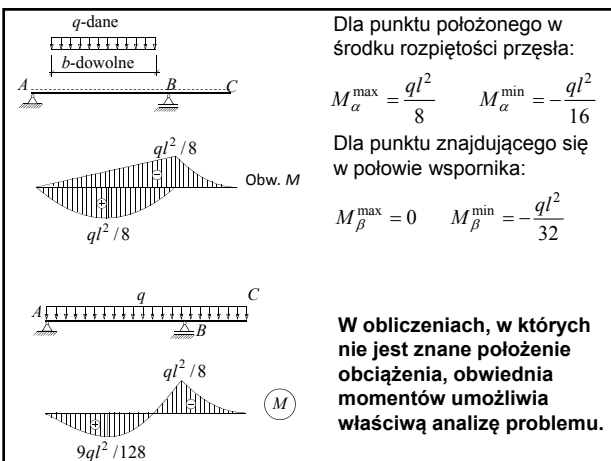
Projektowanie pewnych typów konstrukcji specjalnych (np. suwnic lub mostów) wymaga znajomości ekstremalnych wartości sił wewnętrznych w każdym punkcie układu. Największe lub najmniejsze momenty zginające lub siły poprzeczne określa się na podstawie obwiedni sił wewnętrznych, którą definiuje się następująco:

Obwiednia dowolnej wielkości statycznej (momentu zginającego, siły poprzecznej, siły podłużnej) jest funkcją (wykresem) jej ekstremalnych wartości (minimalnych i maksymalnych) w zależności od położenia danego obciążenia zmiennego.

Obwiednia momentów zginających dla belki swobodnie podpartej obciążonej zmiennym, równomiernie rozłożonym obciążeniem q .

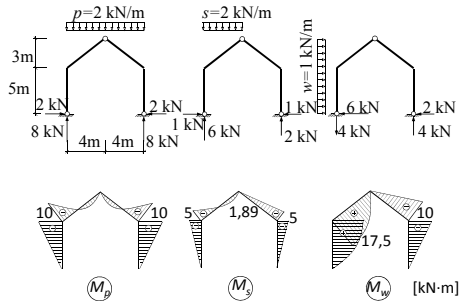






KOMBINACJA OBCIĄŻEN

Obwiednie momentu zginającego lub innych wielkości statycznych, dla pewnych przypadków obciążeń można również wyznaczyć na podstawie tzw. kombinacji obciążeń. Do tego typu obliczeń nie jest konieczne rysowanie linii wpływu.



Schemat	Obciążenie	Punkt							
		1	2	3	4	5	6	7	8
I		-2,00	-4,0	-6,0	-8,0	-10,0	-4,5	-1,00	0,50
II		-1,00	-2,00	-3,00	-4,00	-5,00	-0,75	1,50	1,75
III		-1,00	-2,00	-3,00	-4,00	-5,00	-3,75	-2,50	-1,25
IV		5,50	10,00	13,50	16,00	17,50	13,97	9,88	5,22
V		-2,00	-4,00	-6,00	-8,00	-10,00	-7,50	-5,00	-2,50
Obw. M_{max}		3,50	6,00	7,50	8,00	7,50	9,47	10,38	7,47
Obw. M_{min}		-6,00	-12,00	-18,00	-24,00	-30,00	-16,5	-8,50	-3,25

